© «Вестник ИГЭУ» Вып. 4 2005 г.

УДК 517.55

ОРТОНОРМИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ В КРАТНО – КРУГОВЫХ ОБЛАСТЯХ ПО ДОПУСТИМЫМ МЕРАМ

ЗИНОВЬЕВ Б.С., канд. физ. - мат. наук.

Пусть D – полная, кратно-круговая, содержащая свой центр (начало координат), ограниченная область в C_ζ^n [1, 2, 3]. На подмножествах множества $|D|$ зададим конечную (σ - конечную) меру [4], с. 35) так, чтобы $|D|$ превратилось в пространство с мерой [4], с. 77) и все открытые подмножества $|D|$ были измеримыми [5-7]. Область D представима в виде

$$D=\bigcup_{|\zeta|\in|D|}\Delta_{|\zeta|},\Delta_{|\zeta|}=\left\{\zeta:\zeta_j=|\zeta_j|e^{i\Theta_j},\right.$$
$$\left.0\le\Theta_j\le 2\pi, j=1,..,n\right\}.$$

Обозначим через $A_\lambda^2(D)$ совокупность функций $f(z)$, голоморфных в области $D(f(z)\in H(D))$ и таких, что норма

$$\|f\|=\|f\|_D^\lambda=\left(\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{|D|}d\lambda\int\limits_{\Delta_{|\zeta|}}|f|^2\frac{d\zeta}{\zeta}\right)^{1/2}<\infty \qquad \textbf{(1)}$$

Интеграл (1) понимается, при необходимости, как несобственный. При этом мера μ на D задается равенством

$$d\mu=d\lambda\wedge\frac{d\zeta}{\zeta},\frac{d\zeta}{\zeta}=\frac{d\zeta_1}{\zeta_1}\wedge...\wedge\frac{d\zeta_n}{\zeta_n},$$

где $\wedge$ - знак внешнего умножения.

Введем в пространстве $A_\lambda^2(D)$ внутреннее произведение

$$(f,g)=(f,g)_D^\lambda=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{|D|}d\lambda\int\limits_{\Delta_{|\zeta|}}f(\zeta)\overline{g(\zeta)}\frac{d\zeta}{\zeta} \qquad \textbf{(2)}$$

так, что $(f,f)=\|f\|^2$.

Определение. Конечное или счетное множество функций $\{\varphi_\nu(z)\in A_\lambda^2(D),\nu=0,1,2...\}$ называется ортонормированным в D по мере λ (о.н.с.ф.), если

$$(\varphi_\nu,\varphi_\mu)_D^\lambda=\sigma_{\nu\mu}=\begin{cases}0,\nu\ne\mu,\\1,\nu=\mu,\end{cases}$$

где $\sigma_{\nu\mu}$ - символ Кронекера.

Определение. Пусть $\{\varphi_\nu(z)\in A_\lambda^2(D),\nu=0,1,...\}$ - о.н.с.ф. по мере λ и $f(z)\in A_\lambda^2(D)$. Величины

$$a_\nu=(f,\varphi_\nu)_D^\lambda=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{|D|}d\lambda\int\limits_{\Delta_{|\zeta|}}f(\zeta)\overline{\varphi_\nu(\zeta)}\frac{d\zeta}{\zeta}$$

называются коэффициентами Фурье и ряд

$\sum_{\nu=0}^\infty a_\nu\varphi_\nu(z)=\sum_{\nu=0}^\infty(f,\varphi_\nu)_D^\lambda\varphi_\nu(z)$ называется рядом Фурье функции $f(z)$ относительно системы $\{\varphi_\nu\}$ и меры λ. Пусть $b_\nu,\nu=0,1,2...$ – произвольные числа. Найдем величину (см. [8], с. 80)

$$M_N^2=\left\|f-\sum_{\nu=0}^N b_\nu\varphi_\nu\right\|^2=\|f\|^2-\sum_{\nu=0}^N|b_\nu-a_\nu|^2-$$
$$-\sum_{\nu=0}^N|a_\nu|^2,$$

где $a_\nu=(f,\varphi_\nu)$. Отсюда следует, что M_N^2 достигает максимума при $b_\nu=a_\nu$ и имеем неравенство Бесселя

$$\sum_{\nu=0}^\infty|a_\nu|^2\le\|f\|^2.$$

Предложение 1. Пусть $\{\varphi_\nu(z)\in A_\lambda^2(D)\}$ **-** о.н.с.ф. по заданной мере λ **,** последовательность чисел $\{b_\nu\}$ такова, что:

1. $\sum_{\nu=0}^\infty|b_\nu|^2<\infty.$
2. Ряд $S(z)=\sum_{\nu=0}^\infty b_\nu\varphi_\nu(z)$ равномерно сходится внутри D.

Тогда в интеграле $\|S(z)\|^2$ возможно почленное интегрирование, т.е.

$$\|S(z)\|^2=\left\|\sum_{\nu=0}^\infty b_\nu\varphi_\nu\right\|^2=$$
$$=\sum_{\nu=0}^\infty|b_\nu|^2<\infty,S(z)\in A_\lambda^2(D).$$

Для доказательства оценим разность

$$\left|\left(\sum_{\nu=0}^\infty b_\nu\varphi_\nu(z),\sum_{\mu=0}^\infty b_\mu\varphi_\mu(z)\right)-\sum_{\nu=0}^\infty|b_\nu|^2\right|^2=$$
$$=\left|\left(\sum_{\nu=0}^\infty b_\nu\varphi_\nu(z)-\sum_{\nu=0}^N b_\nu\varphi_\nu(z),\sum_{\nu=0}^N b_\nu\varphi_\nu(z)\right)\right|^2=$$
$$=\left|\left(\sum_{\nu=N+1}^\infty b_\nu\varphi_\nu(z),\sum_{\nu=0}^N b_\nu\varphi_\nu(z)\right)\right|^2\le$$

$$\le \left\| \sum_{\nu=N+1}^{\infty} b_\nu \varphi_\nu(z) \right\|_D^2 \cdot \left\| \sum_{\nu=0}^{N} b_\nu \varphi_\nu(z) \right\|_D^2 =$$

$$= \left\| r_N(z) \right\|_D^2 \cdot \sum_{\nu=0}^{N} |b_\nu|^2 \to 0, N \to \infty,$$

так как если $r_{NP} = \sum_{\nu=N+1}^{N+P} b_\nu \varphi_\nu(z)$, то $\lim_{P\to\infty} r_{NP \Rightarrow} r_N$

равномерно внутри D. Поэтому для $z \in D_{0,} \overline{D_0} \subset D$, имеем

$$\|r_N\|_{D_0}^2 = \lim_{P\to\infty} \|r_{NP}\|_{D_0}^2 \le \lim_{P\to\infty} \|r_{NP}\|_D^2 =$$

$$= \sum_{\nu=N+1}^{\infty} |b_\nu|^2,$$

т.е. $\|r_N\|_D^2 \le \sum_{\nu=N+1}^{\infty} |b_\nu|^2 \to 0, N \to \infty.$

Более общим является

Предложение 2. ([8], с.83) Пусть $\left\{ \varphi_\nu(z) \in A_\lambda^2(D) \right\}$ - о.н.с.ф. по мере λ, числа $\{b_\nu\}, \{c_\nu\}$ таковы, что:

1. $\sum_{\nu=0}^{\infty} |b_\nu|^2 < \infty, \sum_{\nu=0}^{\infty} |c_\nu|^2 < \infty.$
2. Ряды $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu \varphi_\nu(z), \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu(z)$ равномерно сходятся внутри D.

Тогда величину $\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu \varphi_\nu(z), \sum_{\mu=0}^{\infty} c_\mu \varphi_\mu(z) \right)_D^\lambda$ можно находить почленным интегрированием.

Доказательство предложения 2 аналогично доказательству предложения 1. Для этого оценим разность

$$\left| \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu \varphi_\nu(z), \sum_{\mu=0}^{N} c_\mu \varphi_\mu(z) \right) - \sum_{\nu=0}^{N} b_\nu \overline{c_\nu} \right|^2 =$$

$$= \left| \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu \varphi_\nu(z) - \sum_{\nu=0}^{N} b_\nu \varphi_\nu(z), \sum_{\mu=0}^{N} c_\mu \varphi_\mu(z) \right) \right|^2 =$$

$$= \left| \left(\sum_{\nu=N+1}^{\infty} b_\nu \varphi_\nu(z), \sum_{\mu=0}^{N} c_\mu \varphi_\mu(z) \right) \right|^2 \le$$

$$\le \left\| \sum_{\nu=N+1}^{\infty} b_\nu \varphi_\nu(z) \right\|^2 \cdot \left\| \sum_{\mu=0}^{N} c_\mu \varphi_\mu(z) \right\|^2 \le$$

$$\le \sum_{\nu=N+1}^{\infty} |b_\nu|^2 \cdot \sum_{\mu=0}^{N} |c_\mu|^2 \to 0, N \to \infty.$$

Поэтому $\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu \varphi_\nu(z), \sum_{\mu=0}^{\infty} c_\mu \varphi_\mu(z) \right)_D^\lambda = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu \overline{c_\nu}.$

Сформулируем четыре определения «допустимой» меры и найдем некоторые связи между ними.

Определение 1. Меру λ называют А-допустимой, если для любых целых неотрицательных чисел $(k_1, ..., k_n) = k$ выполняется неравенство [5, 6]

$$\underset{|D|}{\mathrm{vrai\,sup}} |\zeta|^k = \max_{|\partial D|} |\zeta|^k.$$

Определение 2. Меру λ называют С-допустимой для совокупности функций $\{f\}$, если для любого связного компакта $K \subset D$ существует постоянная $C(K)$, такая, что для $z \in K, f \in \{f\}$

$$|f(z)| \le C(K) \|f\|_D^\lambda.$$

Определение 3. Меру λ называют D-допустимой для совокупности функций $\{f\}$, если в интеграле (1) допускается почленное интегрирование для $\{f\}$.

Поскольку $d\upsilon = \frac{1}{(2i)^n} d|\zeta|^2 \wedge \frac{d\zeta}{\zeta}$ - мера Лебега на D, где $d\upsilon$ - элемент объема, то для меры Лебега $d\lambda = \pi^n d|\zeta|^2$ на $|D|$ будем рассматривать также заданные на D меры $d\mu = h(\zeta, \overline{\zeta}) d\upsilon, \text{где} \, h > 0$ в D, $h \in C(\overline{D})$, h -весовая функция.

Определение 4. Меру $d\mu = h d\upsilon, \text{где} \, h > 0$ в D, $h \in C(\overline{D})$, называют весовой или В-допустимой мерой [9].

Для полных кратно-круговых областей D, содержащих свой центр (начало координат), ортонормированные системы обычно ищутся в виде мономов $\varphi_\nu(z) = b_\nu z^\nu = b_{\nu_1, ..., \nu_n} z_1^{\nu_1} ... z_n^{\nu_n}$. В силу их ортонормированности по λ в D, имеем

$$b_\nu^2 = \left(\frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|D|} d\lambda \int_{\Delta_{|\zeta|}} |\zeta|^{2\nu} \frac{d\zeta}{\zeta} \right)^{-1} = \left(\int_{|D|} |\zeta|^{2\nu} d\lambda \right)^{-1}.$$

Поэтому коэффициенты Фурье a_ν находятся по формуле

$$a_\nu = (f, \varphi_\nu) = \frac{b_\nu}{(2\pi i)^n} \int_{|D|} d\lambda \int_{\Delta_{|\zeta|}} f \overline{\zeta}^\nu \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Известно, что для областей D, описанных выше, любая голоморфная в D функция $f(z)$ представима равномерно и абсолютно сходящимся внутри D кратным степенным рядом

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu b_\nu z^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu(z),$$

Где $a_\nu = (f, \varphi_\nu)$, который может быть преобразован в ряд Фурье, причем

$$c_\nu = a_\nu b_\nu = \frac{b_\nu^2}{(2\pi i)^n} \int_{|D|} d\lambda \int_{\Delta_{|\zeta|}} f \overline{\zeta}^\nu \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Предложение 3. Заданная на $|D|$ мера λ является D-допустимой для пространства функций $\left\{ A_\lambda^2(D) \right\}$..

Пусть $f \in A^2_\lambda(D)$ и $f = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu(z)$,

где $\varphi_\nu(z) = b_\nu z^\nu, \nu = (\nu_1, ..., \nu_n)$. Данный ряд, как преобразованный из степенного, также равномерно сходится внутри D. В силу неравенства Бесселя для $f \in A^2_\lambda(D)$ имеем неравенство $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2 \le \|f\|^2_\lambda < \infty.$

Поэтому по предложению 1 мера λ является D–допустимой для пространства $\{A^2_\lambda(D)\}$..

Предложение 4 (см. [10]). А-допустимая мера является D-допустимой для пространства голоморфных функций $\{H(D)\}$.

Доказательство. Представим функцию $f(z) \in H(D)$ в области D степенным рядом $f(z) = \sum_{\alpha \ge 0} c_\alpha z^\alpha$. Для того, чтобы можно было почленно интегрировать в интеграле (1), достаточно (см. [4], с. 115), чтобы сходился числовой ряд

$\sum_{\alpha \ge 0} |a_\alpha|^2 = \sum_{\alpha \ge 0} \left|\frac{c_\alpha}{b_\alpha}\right|^2 = \sum_{\alpha \ge 0} |c_\alpha|^2 \int_{|D|} |\zeta|^{2\alpha} d\lambda < \infty,$ где

$a_\alpha = (f, \varphi_\alpha)$. Это эквивалентно (по теореме Абеля) абсолютной сходимости в единичном полицилиндре $\Pi(0,1)$ степенного ряда $\sum_{\alpha \ge 0} \left(|c_\alpha|^2 \int_{|D|} |\zeta|^{2\alpha} d\lambda \right) z^\alpha$, что, в свою очередь, эквивалентно ([3], с.30) выполнению неравенства $\overline{\lim_{\|\alpha\| \to \infty}} \sqrt[\|\alpha\|]{|c_\alpha|^2 \int_{|D|} |\zeta|^{2\alpha} d\lambda} \le 1$,

где $\|\alpha\| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$. Последнее неравенство эквивалентно следующему ([6], с. 7):

$$\overline{\lim_{\|\alpha\| \to \infty}} \sqrt[\|\alpha\|]{|c_\alpha|^2 \operatorname{vrai}\sup_{|D|} |\zeta|^{2\alpha}} \le 1 .$$

По условию А-допустимости имеем

$\overline{\lim_{\|\alpha\| \to \infty}} \sqrt[\|\alpha\|]{|c_\alpha|^2 d^2_\alpha(D)}, d^2_\alpha(D) = \max_{\partial D} |\zeta|^{2\alpha}$ или

$\overline{\lim_{\|\alpha\| \to \infty}} \sqrt[\|\alpha\|]{|c_\alpha|^2 d^2_\alpha(D)} \le 1 .$

Это неравенство выполняется в силу сходимости ряда $\sum_{\alpha \ge 0} c_\alpha z^\alpha$ в D и теоремы 5.13 из [3, с.30].

Поскольку для $f \in H(D)$ $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2 = \|f\|^2_D$ (выполняется равенство Парсеваля (см. п. 2)), то для А-допустимой меры λ $\|f\|^\lambda_D < \infty$ и $H(D) = A^2_\lambda(D)$.

Предложение 5. Мера Лебега $d\upsilon$ является С-допустимой мерой для $f \in \{A^2_\lambda(D)\}$.

Доказательство. Рассмотрим полицилиндр $\Pi(z_0, r) = \left\{ z : \left| z_j - z^0_j \right| < r, j = 1, ..., n \right\} \subset D.$ Функцию $f(z)$ представим в $\overline{\Pi}(z_0, r)$ степенным рядом $f(z) = \sum_{\alpha \ge 0} c_\alpha (z - z_0)^\alpha$, равномерно и абсолютно сходящимся в $\overline{\Pi}$. Поэтому возможно почленное интегрирование (по мере Лебега) в интеграле (1) и

$\|f\|^2_\Pi = \int_{\overline{\Pi}} |f|^2 d\upsilon = \frac{1}{(2i)^n} \int_{|\overline{\Pi}|} d|\zeta|^2 \int_{\Delta_{|\zeta|}} |f|^2 \frac{d\zeta}{\zeta} \ge$

$\ge \pi^n r^{2n} |f(z_0)|^2$,

т.е.

$$|f(z_0)|^2 \le \frac{1}{\pi^n r^{2n}} \|f\|^2_\Pi .$$

Пусть K – произвольный компакт из D и $z_0 \in K$. Будем вписывать в D полицилиндры вида $\overline{\Pi}(z_0, r)$, где $z_0 \in K$, для которых

$|f(z_0)| \le \frac{1}{\pi^{n/2} r^n} \|f\|_\Pi \le C(\Pi) \|f\|_D$.

Функция $C(\Pi) = \pi^{-n/2} r^{-n}$ является непрерывной на компакте K и поэтому достигает максимума на K (при минимуме r). Этот максимум и будет искомой величиной $C(K)$ такой, что

$|f(z)| \le C(K) \|f\|_D < \infty$, где $z \in K, f \in A^2_{d\upsilon}(D)$.

Предложение 6. Весовая мера $d\mu = h d\upsilon$ является С – допустимой для $f \in \{A^2_\lambda(D)\}$.

Для доказательства следует применить теорему о среднем для h в ограниченной области D.

Предложение 7. Мера Лебега, В и С – допустимые меры для $f \in A^2_\lambda(D)$ являются D-допустимыми. Это следует из предложения 3.

Предложение 8. D-допустимая мера λ является и С-допустимой для $f \in \{A^2_\lambda(D)\}$.

Доказательство как в предложении 5.

Предложение 9. (см. [11]). Мера $d\mu = h d\upsilon$ локально интегрируема в D относительно меры Лебега, непрерывная и положительная в $D \setminus M$, где M - компакт из D, является С-допустимой для $f \in \{A^2_\lambda(D)\}$.

Отметим, что не каждая мера, абсолютно непрерывная относительно меры Лебега, является С–допустимой.

Предложение 10. (ср. [11]). Пространство $A^2_\lambda(D)$ с С-допустимой мерой λ является гильбертовым пространством с внутренним произведением (2) и нормой (1).

Для этого ряда справедливо

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu(z) \overline{\varphi_\nu(\zeta)} = K(z, \overline{\zeta}) \qquad (3)$$

Предложение 11. Если $\{\varphi_\nu(z)\}$ -о.н.с.ф. из $A^2_\lambda(D)$ по С-допустимой мере , то ряд (3) сходится абсолютно и равномерно внутри области $G = D_z \times D_{\overline{\zeta}} \subset C^{2n}_{z\overline{\zeta}}$.

Доказательство. Пусть точка $z_0 \in K \subset D$. Учитывая ортонормированность системы $\{\varphi_\nu\}$ и С-допустимость меры λ, имеем

$$\sum_{\nu=0}^{N} |\varphi_\nu(z_0)|^2 = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{|\overline{D}|} d\lambda \int\limits_{\Delta_{|\zeta|}} \left| \sum_{\nu=0}^{N} \varphi_\nu(\zeta)\overline{\varphi_\nu(z_0)} \right|^2 \frac{d\zeta}{\zeta} \ge$$

$$\ge \left\| \sum_{\nu=0}^{N} \varphi_\nu(\zeta)\overline{\varphi_\nu(z_0)} \right\|_K^2 \ge C(K)\left(\sum_{\nu=0}^{N} |\varphi_\nu(z_0)|^2 \right)^2.$$

Отсюда следует, что для любого N, при $z_0 \in K$,

$$\sum_{\nu=0}^{N} |\varphi_\nu(z_0)|^2 \le C(K).$$

Пусть $z \in K_z \subset D_z$, $\zeta \in K_\zeta \subset D_\zeta$. Тогда, в силу неравенства Буняковского – Шварца, имеем для любого N

$$\left(\sum_{\nu=0}^{N} \left| \varphi_\nu(z)\overline{\varphi_\nu(\zeta)} \right| \right)^2 \le \left(\sum_{\nu=0}^{N} |\varphi_\nu(z)|^2 \right)\left(\sum_{\nu=0}^{N} |\varphi_\nu(\zeta)|^2 \right) \le$$ т.е.

$$\le C^2(K),$$

$$\sum_{\nu=0}^{N} \left| \varphi_\nu(z)\overline{\varphi_\nu(\zeta)} \right| \le C(K)$$

и по теореме Вейерштрасса ряд сходится абсолютно и равномерно на компакте $K_z \times K_\zeta \subset G$. Поскольку для любого компакта $K \subset G$ существует компакт $K_z \times K_\zeta \supset K$, то теорем доказана.

Определение. Сумма ряда (3) – функция $K(z,\overline{\zeta})$ называется ядром (кернфункцией) Бергмана ортонормированной системы функций $\{\varphi_\nu(z)\} \in A_\lambda^2(D)$ по мере λ.

Предложение 12. Кернфункция $K(z,\overline{\zeta})$ голоморфна по z и антиголоморфна по ζ в G, причем $K(z,\overline{\zeta}) = \overline{K(\overline{z},\zeta)}$.

Предложение 13. При фиксированном $\zeta \in D_\zeta$ кернфункция $K(z,\overline{\zeta})$ принадлежит пространству $A_\lambda^2(D)$ по z для D-допустимой меры.

Доказательство. Найдем

$$\left\| K(z,\overline{\zeta}) \right\|_\lambda^2 = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{|D|} d\lambda \int\limits_{\Delta_{|\zeta|}} \left| K(z,\overline{\zeta}) \right|^2 \frac{dz}{z} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \varphi_\nu(\zeta)\overline{\varphi_\mu(\zeta)} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{|D|} d\lambda \int\limits_{\Delta_{|\zeta|}} \varphi_\nu(\zeta)\overline{\varphi_\mu(z)} \frac{dz}{z} =$$ и

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} |\varphi_\nu(\zeta)|^2 = K(\zeta,\overline{\zeta}) < \infty$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |\varphi_\nu(\zeta)|^2 = \left\| K(z,\overline{\zeta}) \right\|_\lambda^2.$$

Отметим, что при фиксированном $\zeta \in D$ ряд (3), определяющий ядро Бергмана $K(z,\overline{\zeta})$, можно понимать как ряд Фурье функции $K(z,\overline{\zeta})$ при $a_\nu = \overline{\varphi_\nu(\zeta)}$, т.е.

$$a_\nu = \left(K(z,\overline{\zeta}), \varphi_\nu \right) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{|D|} d\lambda \int\limits_{\Delta_{|\zeta|}} K(z,\overline{\zeta})\overline{\varphi_\nu(z)} \frac{dz}{z} =$$ т.е

$$= \overline{\varphi_\nu(\zeta)},$$

. ряд кернфункции $K(z,\overline{\zeta})$ есть частный случай разложения функции в ряд Фурье.

Равномерная и абсолютная сходимость ряда кернфункции (3) имеет место и в общем случае ряда Фурье.

Предложение 14. Ряд Фурье функции $f(z) \in A_\lambda^2(D)$ относительно о.н.с.ф. $\{\varphi_\nu \in A_\lambda^2(D)\}$ по С-допустимой мере λ сходится абсолютно и равномерно внутри D.

Доказательство. Для $z \in D$ из неравенства Буняковского – Шварца имеем

$$\left(\sum_{\nu=0}^{m} |a_\nu \varphi_\nu(z)| \right)^2 \le \sum_{\nu=0}^{m} |a_\nu|^2 \sum_{\nu=0}^{m} |\varphi_\nu(z)|^2 \le \|f\|^2 K(z,\overline{z}).$$ Отсюда следует абсолютная сходимость ряда. Равномерная сходимость следует из неравенств

$$\left(\sum_{\nu=m+1}^{\infty} |a_\nu \varphi_\nu(z)| \right)^2 \le \sum_{\nu=m+1}^{\infty} |a_\nu|^2 \sum_{\nu=m+1}^{\infty} |\varphi_\nu(z)|^2 \le$$

$$\le \|f\|^2 \sum_{\nu=m+1}^{\infty} |\varphi_\nu(z)|^2, \text{ где } z \in K \subset D$$

и равномерной сходимости внутри D ряда (6) по С-допустимой мере.

К этому результату примыкает

Предложение 15. Пусть $\{\varphi_\nu(z) \in A_\lambda^2(D)\}$ - о.н.с.ф. по С-допустимой мере λ. Если последовательность чисел $\{b_\nu\}$ такова, что $\sum_{\nu=0}^{\infty} |b_\nu|^2 < \infty$, то ряд

$\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu \varphi_\nu(z) = S(z)$ равномерно и абсолютно сходится внутри D и является рядом Фурье своей суммы $S(z) \in A_\lambda^2(D)$.

Доказательство. Равномерная и абсолютная сходимость доказываются, как в предложении 13. Пусть $S(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu \varphi_\nu(z)$. Коэффициенты Фурье

$$a_\nu = (S, \varphi_\nu) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{|D|} d\lambda \int\limits_{\Delta_{|\zeta|}} \sum_{\mu=0}^{\infty} b_\mu \varphi_\mu(\zeta)\overline{\varphi_\nu(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta} =$$ Поэт

$$= b_\nu.$$

ому $\|S(z)\|^2 = \sum_{\nu=0}^{\infty} |b_\nu|^2 < \infty$ по условию и $S(z) \in A_\lambda^2(D)$.

Список литературы

1. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч.2. – М.: Наука,1976.

2. Фукс Б.А. Введение в теорию функций многих комплексных переменных. – М.: Физматгиз, 1962.

3. Айзенберг Л.А., Зиновьев Б.С. Элементарные свойства и интегральные представления голоморфных функций многих комплексных переменных. – Красноярск: Изд-во Красноярск. ун-та, 1975.

4. Халмош П. Теория меры. – М.: Физматгиз, 1953.

5. Айзенберг Л.А. Интегральные представления функций, голоморфных в n-круговых областях // Математический сборник. – 1964. – Т. 65.– № 1. – С. 104–143.

6. Айзенберг Л.А. Распространение интегральных представлений с ядрами и квазиядрами Сеге для n-круговых областей // Некоторые свойства голоморфных функций комплексных переменных. – Красноярск: Изд-во Красноярск. ун-та, 1973. – С. 3–34.

7. Зиновьев Б.С. Воспроизводящие ядра Бергмана для n-круговых областей, их распространение и связь с ядрами Сеге // Вопросы геометрической теории функций. – Томск, 1969. – Т. 210. – С. 23–33.

8. Фукс Б.А. Специальные главы теории функций многих комплексных переменных. – М.: Физматгиз,1963.

9. Круминг А.А. Ортогональные системы и кернфункция с весом для функций двух комплексных переменных // Ученые записки МОПИ. – 1960. – Т. XCVI. – Вып.6. – С. 157–170.

10. Зиновьев Б.С. Воспроизводящее свойство ядер Бергмана и Сеге для кратно-круговых областей по допустимой мере. Деп. в ВИНИТИ, 1996, №1148 – В96.

11. Аронов А.М. Ядра Бергмана по мере // Некоторые вопросы многомерного комплексного анализа. – Красноярск: Изд-во Красноярск. ун-та, 1980. – С. 215–220.