

Министерство науки и образования Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Ивановский государственный энергетический университет
имени В.И. Ленина»

ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ РАБОТЫ ЭНЕРГОСИСТЕМ

ТРУДЫ ИГЭУ

Выпуск VII

Под редакцией

*доктора технических наук, профессора В.А. Шуина,
доктора технических наук, профессора М.Ш. Мисриханова,
доктора технических наук, профессора А.В. Мошкарина*

Москва
Энергоатомиздат
2004

УДК 621.311

ББК 31.37

П 42

Повышение эффективности работы энергосистем: Тр. ИГЭУ. Вып. VII / Под ред. В.А. Шуина, М.Ш. Мисриханова, А.В. Мошкарин. – М.: Энергоатомиздат, 2004. — 548 с.

ISBN 5-283-02596-9

Редакционная коллегия:

д-р техн. наук, проф. В.Н. Нуждин, д-р техн. наук, проф. М.Ш. Мисриханов,
д-р техн. наук, проф. Б.М. Ларин, д-р техн. наук, проф. А.В. Мошкарин,
д-р техн. наук, проф. В.А. Савельев, д-р техн. наук, проф. В.А. Строев,
д-р техн. наук, проф. С.В. Тарарыкин, д-р техн. наук, проф. В.А. Шуин,
д-р техн. наук, проф. А.В. Шунтов, д-р техн. наук, проф. Ю.Я. Щелькалов,
д-р техн. наук, проф. И.В. Якимец

Рецензенты:

д-р техн. наук, проф. В.А. Семенов (СО-ЦДУ ЕЭС России);
д-р техн. наук, проф. А.В. Шунтов (Информационно-вычислительный
центр Мосэнерго);
д-р техн. наук, проф. Ю.А. Митькин (ГОУВПО «Ивановский
государственный энергетический университет им. В.И. Ленина»)

В предлагаемой читателю книге представлены статьи, являющиеся результатами разработок, теоретических и экспериментальных исследований в области теплоэнергетики, электроэнергетики, систем управления и автоматизации, выполненных сотрудниками Ивановского государственного энергетического университета, МЭС Центра ОАО «ФСК ЕЭС», а также других вузов, научно-исследовательских, проектных и эксплуатационных организаций, сотрудничающих с ИГЭУ и МЭС Центра.

Книга предназначена для специалистов, занимающихся исследованием, разработкой, проектированием и эксплуатацией энергетических систем, электрических станций и сетей, комплексов и устройств их автоматического управления.

ISBN 5-283-02596-9

© Авторы, 2004

УДК 621.314

Магнитные поля токоограничивающих реакторов

М.Ш. Мисриханов, д-р техн. наук, А.Ю. Токарский, канд. техн. наук

Токоограничивающие реакторы, как и другие воздушные реакторы, последовательно включённые в силовую электрическую цепь, создают в окружающем пространстве магнитное поле (МП) промышленной частоты (ПЧ) высокой интенсивности. При размещении токоограничивающих реакторов на открытых распределительных устройствах на значительном их удалении от административных и производственных помещений МП, создаваемые токами таких реакторов, не опасны для электронного оборудования и не создают угрозы для персонала.

Однако довольно часто воздушные, в том числе и токоограничивающие, реакторы устанавливаются в помещениях первых этажей административно-технических зданий. На вторых этажах этих зданий могут располагаться административные помещения или помещения с электронно-техническим оборудованием (аппаратура релейной защиты и автоматики). Высокие уровни МП, создаваемые токами реакторов, неблагоприятно влияют на здоровье персонала и работу оборудования. Так, известно, что МП промышленной частоты оказывают отрицательное влияние на работу мониторов на электронно-лучевых трубках, вызывая дрожание экрана, что ухудшает эргономические параметры оборудования.

Сейчас большое внимание уделяется созданию компактных распределительных устройств, в которых подстанционное оборудование располагается в помещениях на малой площади. В этом случае также необходимо знать уровни напряжённости МП, создаваемые силовым оборудованием, в том числе и воздушными реакторами различного назначения.

В настоящее время отсутствуют строгие параметры электромагнитной совместимости по уровням МП ПЧ для электронно-технического оборудования, поэтому рассмотрим существующие нормативы производ-

ственных воздействий на человека МП промышленной частоты, установленные в СанПиН 2.2.4.1191-03 «Электромагнитные поля в производственных условиях», согласно которым «предельно допустимые уровни напряженности периодических (синусоидальных) МП устанавливаются для условий общего (на все тело) и локального (на конечности) воздействия» (см. табл. 1).

Таблица 1. ПДУ воздействия периодического магнитного поля частотой 50 Гц

Время пребывания, ч	Допустимые уровни МП при воздействии	
	общем, H [А/м] / B [мкТл]	локальном, H [А/м] / B [мкТл]
≤ 1	1600/2000	6400/8000
2	800/1000	3200/4000
4	400/500	1600/2000
8	80/100	800/1000

Определим минимальные расстояния, на которых подстанционный персонал может находиться от токоограничивающих реакторов при воздействии на него МП промышленной частоты в течение восьмичасового рабочего дня. Напряжённость МП, воздействующего на персонал, не должна превышать 80 А/м для всего рабочего дня.

Магнитное поле, создаваемое током одного токоограничивающего реактора. Одинарный токоограничивающий реактор может быть рассмотрен как однослойный соленоид радиусом R_0 , высотой h_p и содержащий N витков, выполненных проводом прямоугольного сечения шириной d с шагом n (см. рис. 1, а). Витки обмотки соленоида описывают винтовую линию, длина S одного витка которой определяется (см. рис. 1, б) по выражению [1]

$$S = \sqrt{(2\pi R_0)^2 + n^2}. \quad (1)$$

В обмотке соленоида протекает ток I_p . На одном шаге винтовой линии от точки M до точки N (один виток обмотки) ток I_p в цилиндрической системе координат может быть разложен на две составляющие I_φ и I_Z :

$$\vec{I}_p = \vec{\varphi}^0 I_\varphi + \vec{z}^0 I_Z,$$

где $\vec{\varphi}^0$ и \vec{z}^0 – единичные векторы по осям φ и Z цилиндрической системы координат.

Ток I_φ протекает в проводе, являющемся проекцией витка на плоскость $\varphi O z$, а ток I_z равномерно распределён в стенке толщиной d полого цилиндра (см. рис. 1, в и 1, г).

Площадь D сечения стенки полого цилиндра определится выражением

$$D = \pi \left(R_0 + \frac{d}{2} \right)^2 - \pi \left(R_0 - \frac{d}{2} \right)^2 = 2\pi R_0 d.$$

Тогда плотность J_z тока I_z в стенке цилиндра составит

$$J_z = \frac{I_z}{D} = \frac{I_z}{2\pi R_0 d}. \quad (2)$$

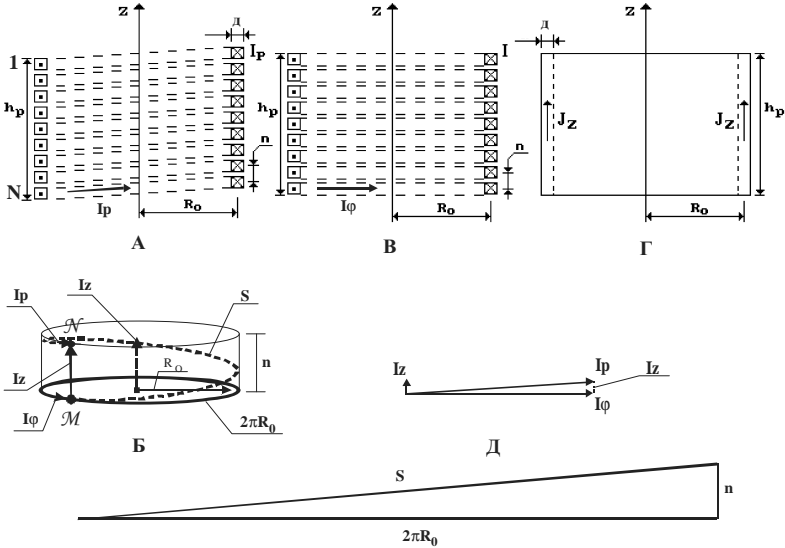


Рис. 1. К определению составляющих I_φ , I_z и J_z полного тока I_p

Из подобия треугольников $I_p - I_z - I_\varphi$ и $S - n - 2\pi R_0$ можно записать:

$$\frac{n}{S} = \frac{I_z}{I_p}, \quad \frac{2\pi R_0}{S} = \frac{I_\varphi}{I_p},$$

тогда составляющие I_Z и I_φ полного тока находятся по выражениям

$$I_Z = I_P \frac{n}{S}, \quad I_\varphi = I_P \frac{2\pi R_0}{S}. \quad (3)$$

Таким образом, одинарный реактор может быть представлен полым цилиндром, в стенке которого протекает ток I_Z , и стопкой круговых витков, в каждом из которых проходит ток I_φ .

Рассмотрим реактор РТОС-10-2500, который содержит N витков радиусом $R_0 = 0,55$ м ($N = 27$). Расстояние между осями проводов соседних витков $n = 0,0385$ м, ширина провода (толщина стенки полого цилиндра) $d = 0,064$ м, высота $h_p = 0,02$ м. Высота «витковой» части реактора составляет 1 м. Максимальное значение тока реактора $I_P = 2500$ А.

По выражению (1) находится длина S винтовой линии:

$$S = \sqrt{(2\pi \cdot 0,55)^2 + 0,0385^2} = 3,456 \text{ м.}$$

Из выражения (3) определяются величины токов I_Z и I_φ :

$$I_Z = I_P \frac{n}{S} = 2500 \frac{0,0385}{3,456} = 27,85 \text{ А,}$$

$$I_\varphi = I_P \frac{2\pi R_0}{S} = 2500 \frac{2\pi \cdot 0,55}{3,456} = 2499,82 \text{ А.}$$

По формуле (2) вычисляется плотность тока J_Z в стенке полого цилиндра:

$$J_Z = \frac{I_Z}{2\pi R_0 d} = \frac{27,85}{2\pi \cdot 0,55 \cdot 0,064} = 125,92 \text{ А/м}^2.$$

Магнитное поле, создаваемое током I_Z полого цилиндра. Для определения уровней напряжённостей МП, создаваемого током плотностью J_Z в стенке полого цилиндра, совместим плоскость $\varphi O z$ цилиндрической системы координат с верхним торцом цилиндра, как показано на рис. 2, а.

Выделим элемент стенки цилиндра толщиной d , шириной $d\ell = R_0 d\varphi$ и высотой h_p (см. рис. 2, а). В выделенном элементе стенки протекает ток $dI = J_z \cdot d \cdot d\ell = J_z \cdot R_0 \cdot d\varphi$. Модуль полного вектора напряжённости $d\vec{H}$ МП,

создаваемого током dI в произвольной точке D пространства вне стенки цилиндра (см. рис. 2, а и 2, б), определится выражением [2]

$$dH = \frac{dI}{4\pi a} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) = \frac{J_z dR_0 d\varphi}{4\pi a} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2), \quad (4)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a &= \sqrt{R_0^2 + R^2 - 2R_0R \cos \varphi}, \\ \cos \alpha_1 &= \frac{z + h_p}{r_2} = \frac{z + h_p}{\sqrt{(z + h_p)^2 + R_0^2 + R^2 - 2R_0R \cos \varphi}}, \\ \cos \alpha_2 &= \frac{z}{r_1} = \frac{z}{\sqrt{z^2 + R_0^2 + R^2 - 2R_0R \cos \varphi}}, \\ r_1 &= \sqrt{z^2 + R_0^2 + R^2 - 2R_0R \cos \varphi}, r_2 = \sqrt{(z + h_p)^2 + R_0^2 + R^2 - 2R_0R \cos \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

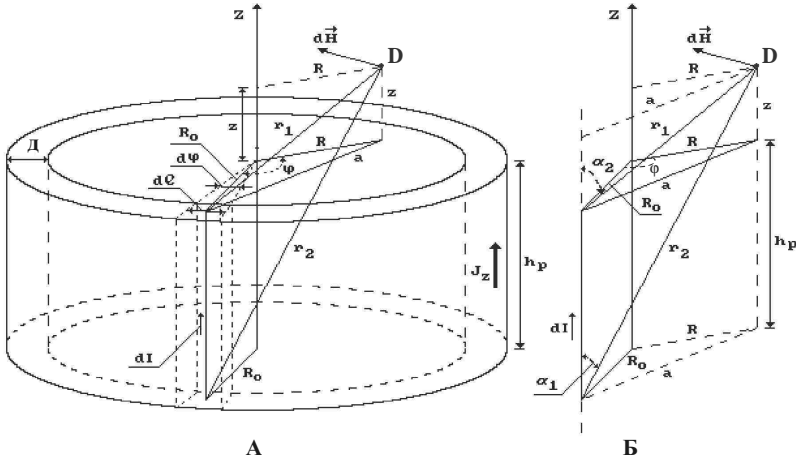


Рис. 2. К определению модуля полного вектора напряжённости $d\vec{H}$ МП, создаваемого током dI в произвольной точке D пространства вне стенки цилиндра

Полный вектор $d\vec{H}_d$ в цилиндрической системе координат имеет две составляющие (см. рис. 3): угловую $d\vec{H}_{\varphi}$ и радиальную $d\vec{H}_{Rd}$. Со-

ставляющая полного вектора по оси z отсутствует, т.к. сам ток $d\vec{l}$ имеет в данном случае только z -ю составляющую.

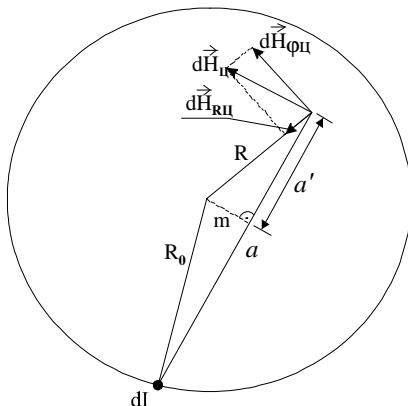


Рис. 3. К определению составляющих $d\vec{H}_{\phi}$ и $d\vec{H}_{R\perp}$ полного вектора $d\vec{H}$

Из подобия треугольников $R - m - a'$ и $dH_{\perp} - dH_{\phi} - dH_{R\perp}$ следует

$$\frac{d\vec{H}_{\phi}}{dH_{\perp}} = \frac{a'}{R}, \quad \frac{dH_{R\perp}}{dH_{\perp}} = \frac{m}{R}.$$

Тогда

$$d\vec{H}_{\phi} = dH_{\perp} \frac{a'}{R}, \quad dH_{R\perp} = dH_{\perp} \frac{m}{R}. \quad (6)$$

Из треугольников (см. рис. 3) $m - R - a'$ и $m - R_0 - (a - a')$

$$m^2 = R_0^2 - (a - a')^2, \quad m^2 = R^2 - (a')^2, \quad (7)$$

тогда, приравняв правые части соотношений (7) и выражая полученное уравнение относительно a' , получим

$$a' = \frac{a^2 + R^2 - R_0^2}{2a}, \quad m = \sqrt{R^2 - \left(\frac{a^2 + R^2 - R_0^2}{2a} \right)^2}. \quad (8)$$

С учётом (4), (5) и (8) интегрирование (6) по φ от 0 до 2π даст зависимость составляющих $H_{\varphi\Omega}(R, z)$ и $H_{R\Omega}(R, z)$ напряжённости $H_{\Omega}(R, z)$, создаваемых плотностью тока J_Z вне стенок рассмотренного полого цилиндра.

Элементарные токи dI'_Z и dI'_Z (см. рис. 4) в произвольной точке, расположенной на оси симметрии AB этих токов ($a = a'$, $\varphi = \phi$ и $z = z'$), создают напряжённости $d\vec{H}'_{\Omega}$ и $d\vec{H}'_{\Omega}$ МП, каждая из которых может быть разложена на составляющие $d\vec{H}'_{\varphi\Omega}$, $d\vec{H}'_{R\Omega}$ и $d\vec{H}'_{\varphi\Omega}$, $d\vec{H}'_{R\Omega}$.

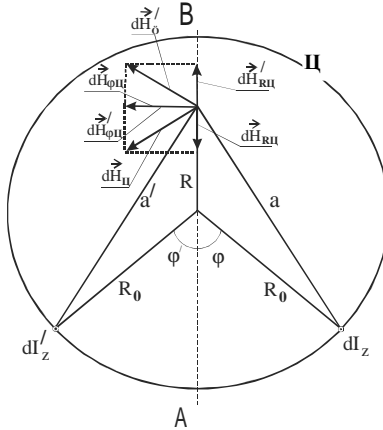


Рис. 4. К определению составляющих МП

Поскольку $dI'_Z = dI'_Z$, $a = a'$, $\varphi = \phi$ и $z = z'$, то $dH_{\Omega} = dH'_{\Omega}$, $d\vec{H}'_{\varphi\Omega} = d\vec{H}'_{\varphi\Omega}$ и $dH_{R\Omega} = dH'_{R\Omega}$, но поскольку $d\vec{H}'_{\varphi\Omega}$ и $d\vec{H}'_{\varphi\Omega}$ совпадают по направлению, а $d\vec{H}'_{R\Omega}$ и $d\vec{H}'_{R\Omega}$ направлены встречно, то

$$d\vec{H}'_{\varphi\Omega} + d\vec{H}'_{\varphi\Omega} = 2 d\vec{H}'_{\varphi\Omega}, \text{ а } d\vec{H}'_{R\Omega} + d\vec{H}'_{R\Omega} = dH_{R\Omega} - dH'_{R\Omega} = 0.$$

Поэтому при интегрировании (6) с учётом (4), (5) и (8) получим

$$\left. \begin{aligned} H_{\varphi\Omega}(R, z) &= \frac{J_Z \Delta R_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a'}{aR} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) d\varphi, \\ H_{R\Omega}(R, z) &= \frac{J_Z \Delta R_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{m}{aR} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) d\varphi = 0, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

т.е. в результирующем МП, создаваемом плотностью тока J_Z вне стенок рассмотренного полого цилиндра, составляющая $\vec{H}_{R\Omega}(R, z)$ отсутствует.

Цилиндрическая система координат выбрана таким образом, что плоскость $R_0\varphi$ совпадает с поверхностью верхнего торца полого цилиндра ($z = 0$). Толщина стенки полого цилиндра, в которой протекает ток I_Z плотностью $J_Z = 125,9 \text{ А/м}^2$, составляет $d = 0,064 \text{ м}$. На рис. 5 показано распределение напряжённости $H_{\varphi\Omega}(R)$ для $z = -0,5 \text{ м}$ и $z = 0 \text{ м}$, т.е. в плоскости поперечного сечения в середине оси цилиндра и в плоскости его верхнего торца, а на рис. 6 – для z , равных $0,1, 0,25, 0,5$ и $0,75 \text{ м}$.

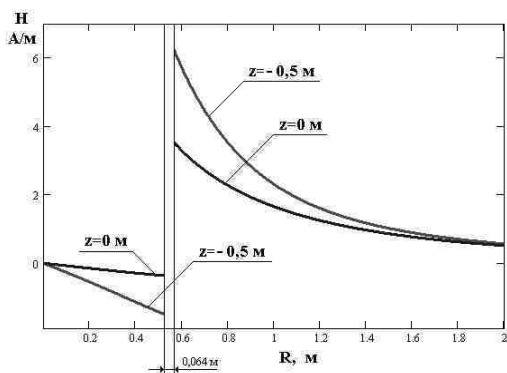


Рис. 5. Распределение напряжённости $H_{\varphi\Omega}(R)$ для $z = -0,5 \text{ м}$ и $z = 0 \text{ м}$

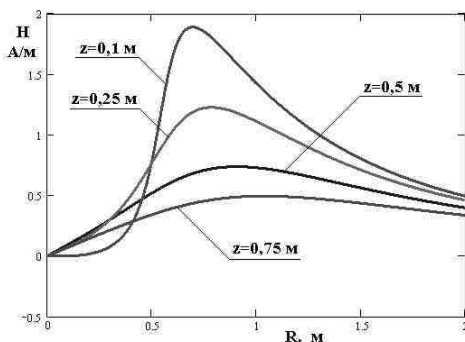


Рис. 6. Распределение напряжённости $H_{\varphi\Omega}(R)$ для z , равных $0,1, 0,25, 0,5$ и $0,75 \text{ м}$

Как видно из рис. 5 и 6, величина напряжённости $H_{\varphi_{ц}}(R, z)$ МП, создаваемого током I_Z , на уровне центра цилиндра ($z = -0,5$ м) достигает значения 6 А/м у наружной поверхности цилиндра, т.е. при $R = R_0 + d$, на поверхности верхнего торца цилиндра ($z = 0$ м) для того же значения R $H_{\varphi_{ц}} < 4$ А/м и с ростом z величина $H_{\varphi_{ц}}$ уменьшается. При $z = 0,1$ м $H_{\varphi_{ц}} < 2$ А/м, при $z = 0,25$ м $H_{\varphi_{ц}} < 1,5$ А/м, при $z = 0,5$ м $H_{\varphi_{ц}} < 1$ А/м, при $z = 0,75$ м $H_{\varphi_{ц}} < 0,5$ А/м. Низкие уровни напряжённости $H_{\varphi_{ц}}$ объясняются малым значением тока $I_Z = 27,85$ А.

Для сравнения картины распределения напряжённости МП в сечении полого цилиндра высотой h_p с током I_Z рассмотрим бесконечно длинный полый цилиндр с внутренним R_1 и внешним R_2 радиусами, в стенке которого протекает ток с равномерной плотностью J (см. рис. 7).

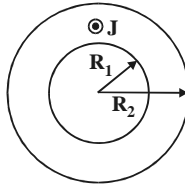


Рис. 7. К определению распределения напряжённости МП в сечении бесконечного полого цилиндра

Поскольку $J = J_Z$, то и $A = A_Z$. В силу симметрии картинка векторный магнитный потенциал не зависит от координат φ и z , а зависит только от координаты R (цилиндрическая система координат).

Первая зона $R \leq R_1$. Поскольку в этой зоне $J = 0$, то используется уравнение Лапласа

$$\nabla^2 \vec{A}_1 = 0,$$

которое для нашей задачи в цилиндрической системе координат примет вид

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{dA_1}{dR} \right) = 0.$$

После интегрирования получим

$$A_1 = C_1 \ln R + C_2. \quad (10)$$

Вторая зона $R_1 \leq R \leq R_2$. В этой зоне $J = J_z$ и следует использовать уравнение Пуассона

$$\nabla^2 \vec{A}_2 = -\mu_0 \vec{J},$$

которое можно записать следующим образом:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{dA_2}{dR} \right) = -\mu_0 J.$$

Решением последнего уравнения будет

$$A_2 = -\frac{1}{4} \mu_0 J R^2 + C_3 \ln \frac{R}{C_4}. \quad (11)$$

Третья зона $R \geq R_2$, $J = 0$. Решая уравнение Лапласа, получим

$$A_3 = C_5 \ln \frac{R}{C_6}. \quad (12)$$

Найдём постоянные интегрирования. Поскольку напряжённость поля на оси цилиндра конечна, то $C_1 = 0$ и уравнение (10) примет вид

$$A_1 = C_2. \quad (13)$$

При $R = R_1$ на границе первой и второй зон $A_1 = A_2$ ($B_{1n} = B_{2n}$) и $\frac{1}{\mu_0 \mu_g} \cdot \frac{dA_1}{dR} = \frac{1}{\mu_0 \mu_{cu}} \cdot \frac{dA_2}{dR}$ ($H_{1t} = H_{2t}$), где $\mu_g = 1$ и $\mu_{cu} = 0,9999897$ – относительные магнитные проницаемости воздуха и меди. Поскольку $\mu_g \approx \mu_{cu}$, то можно принять, что $\frac{dA_1}{dR} = \frac{dA_2}{dR}$.

Примем, что при $R = R_1$ $A_1 = A_2 = 0$, тогда $A_1 = C_2 = 0$, а из (11) и (13) получим

$$-\frac{1}{4} \mu_0 J R_1 + C_3 \ln \frac{R_1}{C_4} = 0; \quad (14)$$

$$-\frac{1}{2} \mu_0 J R_1 + \frac{C_3}{R_1} = 0. \quad (15)$$

Из уравнения (15) определяется постоянная C_3 :

$$C_3 = \frac{1}{2} \mu_0 J R_1^2. \quad (16)$$

Подставляя (16) в (14), найдём постоянную интегрирования C_4 :

$$C_4 = \frac{R_1}{\sqrt{e}}, \quad (17)$$

где e – основание натурального логарифма.

Аналогично при $R = R_2$ $A_2 = A_3$ и $\frac{dA_2}{dR} = \frac{dA_3}{dR}$, тогда из (11) и (12) получим постоянные интегрирования C_5 и C_6 :

$$C_5 = \frac{1}{2} \mu_0 J (R_1^2 - R_2^2), \quad (18)$$

$$C_6 = \frac{R_2}{e^K}, \quad (19)$$

где

$$K = \frac{R_2^2 - R_1^2 \ln \frac{R_2 \sqrt{e}}{R_1}}{R_2^2 - R_1^2}.$$

Подставляя в (11), (12) и (13) значения постоянных интегрирования из формул (16), (17), (18) и (19), выражения для нахождения модулей векторного магнитного потенциала в рассмотренных зонах можно записать как

$$A_1 = 0, \quad (20)$$

$$A_2 = -\frac{1}{4} \mu_0 J R^2 + \frac{1}{2} \mu_0 J R_1^2 \ln \frac{R \sqrt{e}}{R_1}, \quad (21)$$

$$A_3 = \frac{1}{2} \mu_0 J (R_1^2 - R_2^2) \ln \frac{R e^K}{R_2}. \quad (22)$$

Поскольку $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$ и $B_i = B_{i\varphi}$, то индукция МП определяется из соотношений (20), (21) и (22) по выражению

$$B_i = -\frac{dA_i}{dR}. \quad (23)$$

С учетом того, что напряжённость и индукция МП связаны соотношением

$$H_i = -\frac{B_i}{\mu_0}, \quad (24)$$

распределение H_i в рассматриваемых зонах опишется уравнениями

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= 0, \\ H_2 &= \frac{J}{2} \left(R - \frac{R_1^2}{R} \right), \\ H_3 &= \frac{J}{2} \left(\frac{R_2^2 - R_1^2}{R} \right). \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

На рис. 8 показано распределение напряжённости $H = H_\varphi$ в поперечном сечении бесконечного полого цилиндра с толщиной стенки $d = 0,064$ м ($R_1 = 0,518$ м и $R_2 = 0,582$ м) при $J = J_Z = 125,92$ А/м².

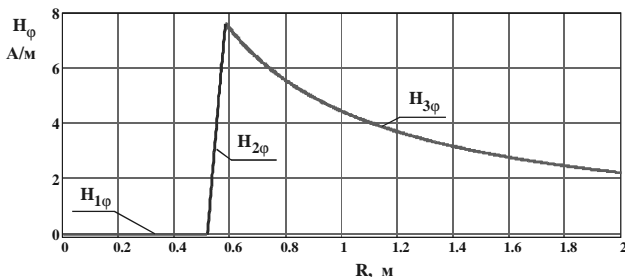


Рис. 8. Распределение напряжённости $H = H_{\varphi r}$ в поперечном сечении бесконечного полого цилиндра

Если при расчёте напряжённости МП полого цилиндра высотой h_p в первом из уравнений (9) с учётом выражений (5) принять, что его высота $h_p = 100$ м, то для $z = -50$ м (середина высоты цилиндра) при плотности тока $J_Z = 125,92$ А/м² получим распределение напряжённости $H_{\varphi r}$, показанной на рис. 9.

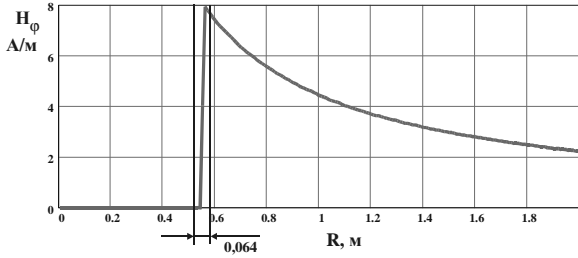


Рис. 9. Распределение напряжённости H_{φ_i} МП на уровне $z = -50$ м в сечении полого цилиндра высотой $h_p = 100$ м и плотностью тока $J_z = 125,92$ А/м²

При рассмотрении кривых распределения напряжённости H_{φ_i} , представленных на рис. 8 и 9, нетрудно видеть, что они имеют несовпадение в области стенки полого цилиндра, поскольку уравнения (4) – (9) выводились для области вне стенки цилиндра. Однако вне области стенки полого цилиндра кривые напряжённости H_{φ_i} совпадают и уравнения (4) – (9) могут использоваться для определения напряжённости МП, создаваемого током I_z такого цилиндра.

Магнитное поле, создаваемое токами I_φ стопки круговых витков. Рассмотрим круговой виток радиусом R_0 , по которому протекает ток I (см. рис. 10). Элемент витка dl с током I . Напряжённость $d\vec{H}$ магнитного поля, создаваемого током I , протекающим в элементе $d\vec{l}$ витка в произвольной точке D , определяется выражением [2]:

$$d\vec{H} = \frac{I}{4\pi r^3} [d\vec{l} \times \vec{r}], \quad (26)$$

где $d\vec{l}$ – вектор элемента витка, направленный по току и совпадающий с касательной MN к окружности витка, \vec{r} – радиус-вектор, проведённый из элемента $d\vec{l}$ в рассматриваемую точку поля, $r = |\vec{r}|$. Вектор $d\vec{H}$ перпендикулярен к плоскости, в которой лежат векторы \vec{r} и $d\vec{l}$. Модуль вектора $d\vec{H}$ может быть определён из выражения (26) путём подстановки в него модуля векторного произведения $[[d\vec{l} \times \vec{r}]] = r dl \sin \alpha$:

$$dH = \frac{I}{4\pi r^3} r dl \sin \alpha = \frac{I}{4\pi r^2} \sin \alpha dl, \quad (27)$$

где α – угол между векторами $d\vec{l}$ и \vec{r} .

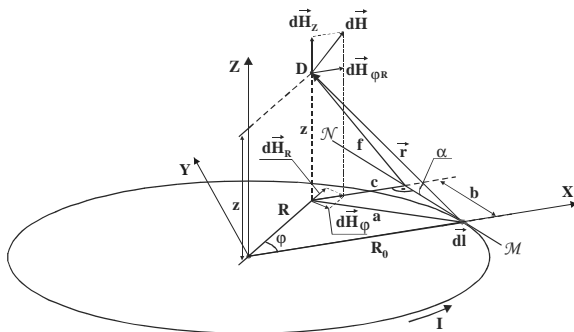


Рис. 10. К определению составляющих $d\vec{H}_Z$ и $d\vec{H}_{\phi R}$ напряжённости МП, создаваемого током I кругового витка

Учитывая, что плоскость, в которой лежат прямые c и f , перпендикулярна касательной MN , выразим r , $\sin \alpha$ и dl через R , φ и z :

$$r = \sqrt{z^2 + a^2}, \quad a = \sqrt{R^2 + R_0^2 - 2RR_0 \cos \varphi}, \quad \sin \alpha = \frac{f}{r}, \quad dl = R_0 d\varphi. \quad (28)$$

Подставим в (27) некоторые (для компактности записи) из полученных соотношений:

$$dH = \frac{IR_0}{4\pi r^2} \frac{f}{r} d\varphi = \frac{IR_0 f}{4\pi r^3} d\varphi. \quad (29)$$

Поскольку треугольники fcz и $dHdH_ZdH_{\phi R}$ подобны, то модуль составляющей $d\vec{H}_Z$ полного вектора $d\vec{H}$ определится из соотношения

$$dH_Z = dH \frac{c}{f} = \frac{IR_0 f}{4\pi r^3} \frac{c}{f} d\varphi = \frac{IR_0 c}{4\pi r^3} d\varphi. \quad (30)$$

Аналогично определим модуль составляющей $d\vec{H}_{\varphi R}$:

$$dH_{\varphi R} = dH \frac{z}{f} = \frac{IR_O f}{4\pi r^3} \frac{z}{f} d\varphi = \frac{IR_O z}{4\pi r^3} d\varphi. \quad (31)$$

Вектор $d\vec{H}_{\varphi R}$ имеет составляющие $d\vec{H}_{\varphi}$ и $d\vec{H}_R$ (см. рис. 11), значения которых определяются по выражениям

$$dH_{\varphi} = dH_{\varphi R} \sin \varphi, \quad dH_R = dH_{\varphi R} \cos \varphi. \quad (32)$$

Расстояние c от проекции точки D на плоскость кругового витка до касательной MN находится по формуле (см. рис. 11)

$$c = R_0 - R \cos \varphi.$$

Тогда выражения (30) и (32) для dH_Z , dH_{φ} и dH_R с учётом (31) примут вид

$$\left. \begin{aligned} dH_Z &= \frac{IR_O}{4\pi} \cdot \frac{R_0 - R \cos \varphi}{r^3} d\varphi, \\ dH_{\varphi} &= \frac{IR_O}{4\pi} \cdot \frac{z \sin \varphi}{r^3} d\varphi, \\ dH_R &= \frac{IR_O}{4\pi} \cdot \frac{z \cos \varphi}{r^3} d\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

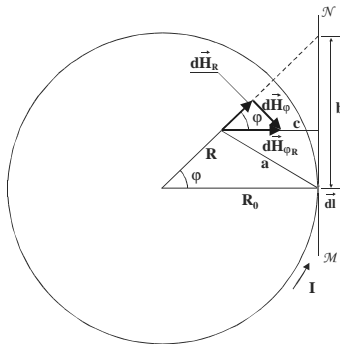


Рис. 11. К определению составляющих $d\vec{H}_{\varphi}$ и $d\vec{H}_R$ напряжённости МП, создаваемого током I кругового витка

Интегрируя уравнения (33) по φ от 0 до 2π , получим составляющие $H_z(R, z)$, $H_\varphi(R, z)$ и $H_R(R, z)$ напряжённости МП, создаваемого током кругового контура:

$$\left. \begin{aligned} H_z(R, z) &= \frac{IR_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R_0 - R \cos \varphi}{\left(\sqrt{z^2 + R^2 + R_0^2 - 2RR_0 \cos \varphi}\right)^3} d\varphi, \\ H_\varphi(R, z) &= \frac{IR_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z \sin \varphi}{\left(\sqrt{z^2 + R^2 + R_0^2 - 2RR_0 \cos \varphi}\right)^3} d\varphi, \\ H_R(R, z) &= \frac{IR_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z \cos \varphi}{\left(\sqrt{z^2 + R^2 + R_0^2 - 2RR_0 \cos \varphi}\right)^3} d\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

На рис. 12 показано распределение составляющих $H_z(R, z)$, $H_\varphi(R, z)$ и $H_R(R, z)$ напряжённости МП, создаваемого током $I_\varphi = 2499,82$ А кругового контура при изменении R от 0 м до 2 м для $z = 0,1$ м (а) и $z = 0,25$ м (б).

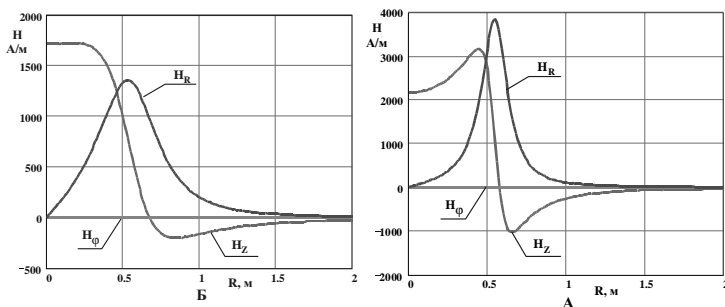


Рис. 12. Распределение $H_z(R, z)$, $H_\varphi(R, z)$ и $H_R(R, z)$, создаваемых током I_φ кругового контура при изменении R от 0 м до 2 м для $z = 0,1$ м (а) и $z = 0,25$ м (б)

Как видно из рисунка, при малых значениях z максимальные значения H_z и H_R находятся в области прохождения провода кругового витка, причём $H_z < H_R$. С увеличением z максимум H_z перемещается на ось кругового витка и становится больше максимума H_R .

При рассмотрении замкнутого кругового витка H_φ для любой произвольно выбранной точки равна нулю, т.к. составляющие $d\vec{H}_\varphi$ и $d\vec{H}'_\varphi$, создаваемые элементами dl и dl' , симметрично расположенными относи-

тельно R (см. рис. 13), равны по модулю и направлены встречно. Сумма векторов $d\vec{H}_\varphi + d\vec{H}'_\varphi = 0$. Поэтому при интегрировании второго уравнения выражения (34) от 0 до 2π последнее обращается в нуль.

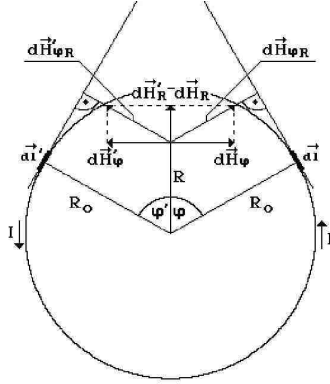


Рис. 13. К определению составляющей H_φ напряжённости МП, создаваемого током I кругового витка

Плоскость, проходящую через ось провода верхнего витка стопки круговых витков, является начальным расчётным уровнем: $z = 0$ (см. рис. 14). Тогда в преобразованных из (34) выражениях i -й виток, отстоящий вниз по оси OZ на расстояние, равное « in », будет содержать вместо значения z значение $z_i = z + i \cdot n$. Для стопки круговых витков, состоящей из N витков, составляющие $H_z(R, z)$, $H_\varphi(R, z)$ и $H_R(R, z)$ напряжённости МП, создаваемого током I_φ находятся по выражениям

$$\left. \begin{aligned} H_z(R, z) &= \frac{I_\varphi R_O}{4\pi} \sum_{i=0}^{N-1} \int_0^{2\pi} \frac{R_O - R \cos \varphi}{\left(\sqrt{(z + in)^2 + R^2 + R_O^2 - 2RR_O \cos \varphi} \right)^3} d\varphi, \\ H_\varphi(R, z) &= \frac{I_\varphi R_O}{4\pi} \sum_{i=0}^{N-1} \int_0^{2\pi} \frac{(z + in) \sin \varphi}{\left(\sqrt{(z + in)^2 + R^2 + R_O^2 - 2RR_O \cos \varphi} \right)^3} d\varphi, \\ H_R(R, z) &= \frac{I_\varphi R_O}{4\pi} \sum_{i=0}^{N-1} \int_0^{2\pi} \frac{(z + in) \cos \varphi}{\left(\sqrt{(z + in)^2 + R^2 + R_O^2 - 2RR_O \cos \varphi} \right)^3} d\varphi. \end{aligned} \right\} (35)$$

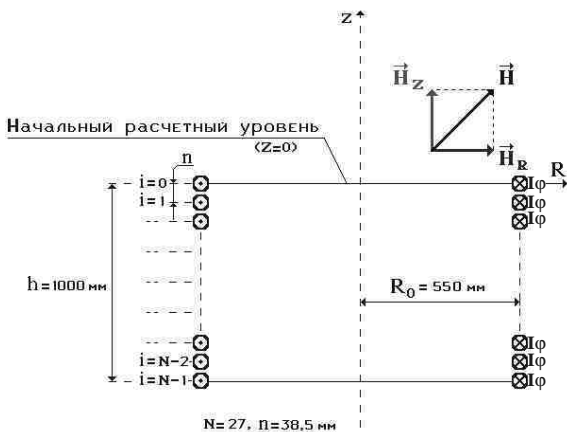


Рис. 14. Схема расположения стопки круговых витков с токами I_ϕ и создаваемых ими составляющих векторов напряжённости МП

На рис. 15 показаны полученные по выражениям (35) распределения напряжённости $H_z(R, z)$ и $H_R(R, z)$ МП, создаваемых стопкой кольцевых витков с токами $I_\phi = 2499,82$ А на уровне $z = 0,1$ м.

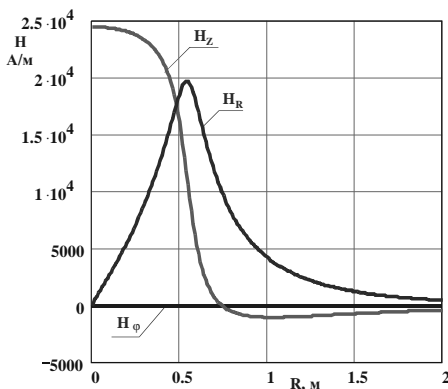


Рис. 15. Распределение напряжённости $H_z(R, z)$ и $H_R(R, z)$ МП, создаваемых на уровне $z = 0,1$ м током $I_\phi = 2499,82$ А

Если для одинарного кругового витка с током I_ϕ на уровне $z = 0,1$ м (см. рис. 12, а) максимальные значения H_z и H_R находятся в области прохож-

дения провода кругового витка, причём $H_Z < H_R$, то для стопки круговых витков на этом же уровне максимум H_Z находится на оси OZ и $H_Z > H_R$.

Магнитное поле, создаваемое полным током реактора. Напряжённость H магнитного поля, создаваемого полным током I_P реактора, будет содержать три составляющие: H_Z и H_R , создаваемые током I_ϕ , значения которых определяются по выражениям (35), и $H_{\phi_{л}}$, создаваемую током I_Z и определяемую по формуле (31). Составляющая $H_{\phi_{л}}$, создаваемая током I_ϕ , при интегрировании по замкнутому круговому контуру обращается в нуль. Поскольку токи I_P и I_ϕ , а значит, и составляющие H_Z , H_R и $H_{\phi_{л}}$ напряжённости МП имеют одинаковые фазные углы, то результирующая напряжённость H МП имеет линейную поляризацию, а её модуль определяется по выражению

$$H = \sqrt{H_Z^2 + H_R^2 + H_{\phi_{л}}^2} . \quad (36)$$

На рис. 16 показано распределение напряжённостей H_Z , H_R , $H_{\phi_{л}}$ и H МП, создаваемого полным током I_P реактора на уровне $z = 0,1$ м. Составляющая $H_{\phi_{л}}$, в сравнении с остальными составляющими напряжённости МП, настолько мала, что кривая её изменения на рис. 16 обратилась в прямую со значениями, находящимися в области нуля. Это объясняется высокими значениями составляющих H_Z , H_R , и H , что приводит к выбору масштаба, при котором изменения $H_{\phi_{л}}$ практически не видны. На рис. 17 приведена картина изменения напряжённости $H_{\phi_{л}}$ в удобном масштабе.

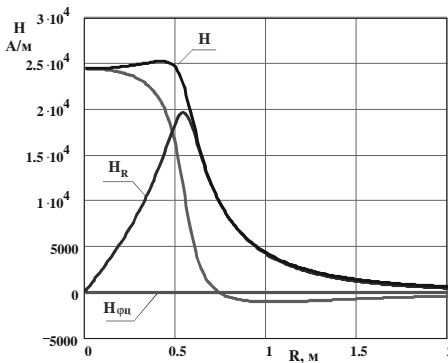


Рис. 16. Распределение напряжённостей H_Z , H_R , $H_{\phi_{л}}$ и H МП, создаваемого полным током I_P реактора на уровне $z = 0,1$ м

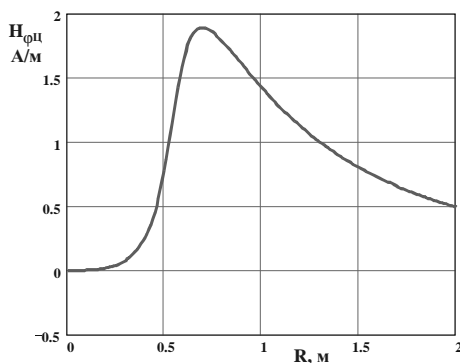


Рис. 17. Изменения составляющей H_{ϕ} напряжённости МП, создаваемого током I_Z на уровне $z = 0,1$ м

Если на рассматриваемом уровне $H_R \approx 20$ кА/м, а H_Z достигает значений более 24 кА/м, то величина H_{ϕ} меньше 2 А/м. Низкие уровни составляющей напряжённости H_{ϕ} объясняются небольшим значением тока $I_Z = 27,85$ А, что в свою очередь вызвано малым в сравнении с высотой обмотки реактора ($h_p = 1$ м) шагом намотки ($n = 0,0385$ м) витков.

С увеличением шага намотки и (или) уменьшением числа витков реактора долевое участие составляющей напряжённости H_{ϕ} в значении полной напряжённости H увеличивается.

На рис. 18 показано распределение напряжённости МП H , создаваемого током I_p на уровнях 1, 1,5, 2 и 2,5 м, а на рис. 19 – на уровнях 3, 4, 4,6, 5 и 6 м.

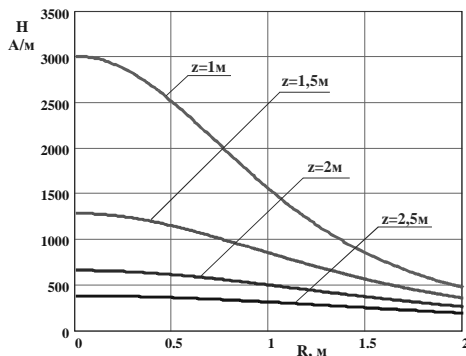


Рис. 18. Распределение напряжённости МП H на уровнях 1, 1,5, 2 и 2,5 м

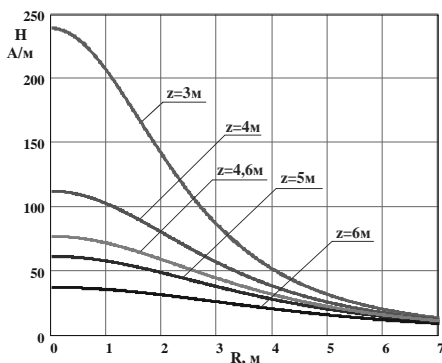


Рис. 19. Распределение напряженности МП H на уровнях 3, 4, 4,6, 5 и 6 м

Если на уровне $z = 0,1$ м (см. рис. 16) H имеет максимум при $R \approx 0,435$ м, т.е. по координате R находится ближе к области расположения витков реактора, то на уровнях, более удалённых от верхнего витка реактора, максимальное значение H приходится на $R = 0$ м, т.е. на ось реактора. Это обусловлено тем, что с ростом z максимум H уменьшается, но остаётся на оси реактора, т.е. при $R = 0$ м, а уменьшение максимума H_R сопровождается смещением его в сторону увеличения R (см. рис. 6 и 20).

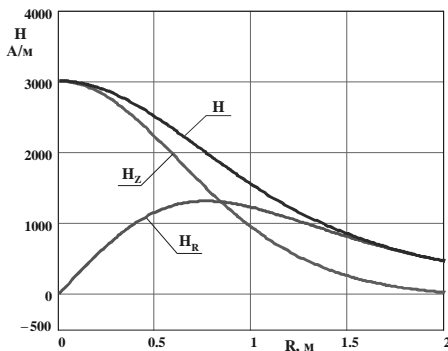


Рис. 20. Изменение составляющих $H_z(R)$, $H_R(R)$ и $H(R)$ на уровне $z = 1$ м

На рис. 21 дано распределение напряжённости H МП, создаваемого реактором на уровнях $z = 0$ м (верхний торец обмотки) и $z = -0,5$ м (середица обмотки) при изменении R от 1 до 2 м (зона сбоку от реактора). В

зоне с $0 < R < 1,4$ м значения напряжённости $H(z = 0 \text{ м}) > H(z = -0,5 \text{ м})$, поскольку при определении по выражению (36) результирующих напряжённости МП их составляющие $H_R(z = 0 \text{ м})$ и $H_Z(z = -0,5 \text{ м})$ имеют практически одинаковые значения модулей (см. рис. 22), но составляющая $H_R(z = -0,5 \text{ м}) = 0$, а составляющая $H_Z(z = 0 \text{ м})$ отлична от нуля. При дальнейшем увеличении R кривые H для обеих уровней совпадают.

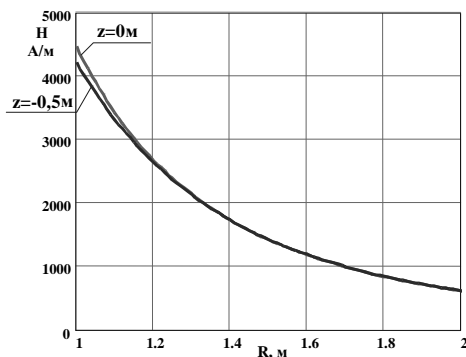


Рис. 21. Распределение напряжённости H на уровнях $z = 0 \text{ м}$ и $z = -0,5 \text{ м}$ при изменении R от 1 до 2 м

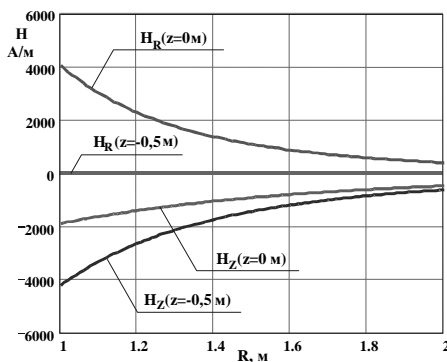


Рис. 22. Распределение составляющих напряжённости H на уровнях $z = 0 \text{ м}$ и $z = -0,5 \text{ м}$ при изменении R от 1 до 2 м

На рис. 23 показаны кривые распределения H для R , равных 0,6, 1, 2, 3 и 4 м при изменении z от 0 до -1 м (параллельно оси реактора).

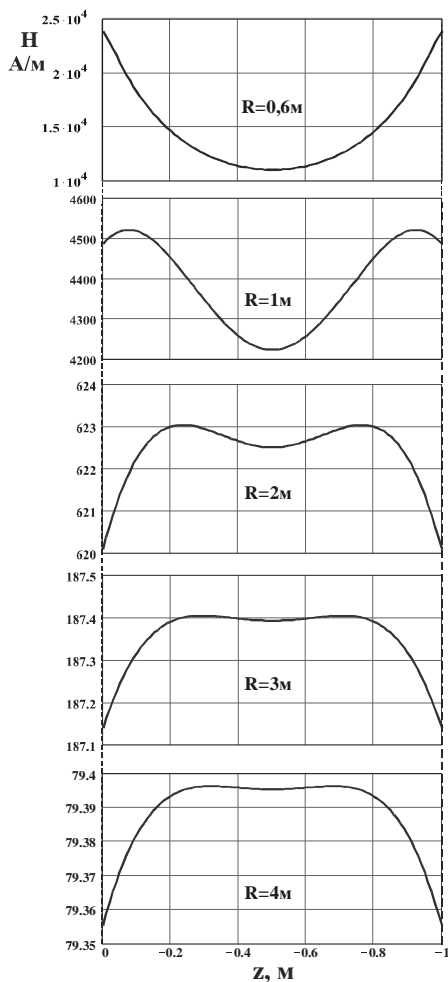


Рис. 23. Распределения H для R , равных 1, 2, 3 и 4 м при изменении z от 0 до -1 м

Кривые H симметричны относительно середины высоты обмотки реактора ($z = -0,5$ м). При R , близком к $R_0 = 0,55$ м, максимумы H находятся в области торцов обмотки реактора (см. $R = 0,6$ м и $R = 1$ м). С увеличением R максимальные значения H сдвигаются в зону середины обмотки, но даже при $R = 25$ м не совмещаются, т.е. до положения $z = -0,5$ м не доходят.

На рис. 24 приведена кривая изменения H для $R = 0$ м (ось реактора) при изменении z от 3 до 7 м.

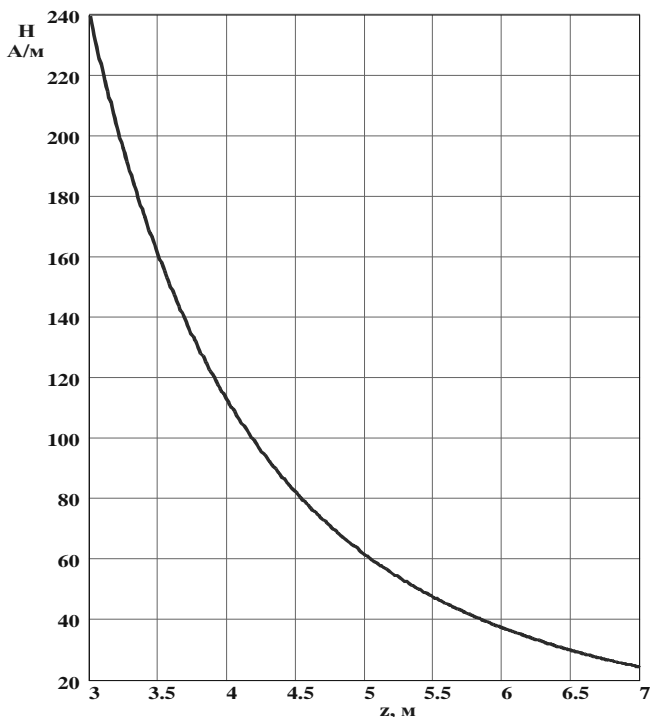


Рис. 24. Изменение $H(z)$ вне реактора на его оси

Магнитное поле, создаваемое трёхфазной группой реакторов.

Рассмотрим группу из трёх одинарных реакторов, показанных на рис. 25 (вид сверху). Оси реакторов находятся на оси OX . Оси крайних реакторов сдвинуты по оси OX на $\pm u$. Каждый из реакторов подключён к одной из фаз А, В или С (см. рис. 25), в которых протекают токи:

$$i_{pA} = 2500 \text{ А}, \quad i_{pB} = 2500e^{-j120^\circ} \text{ А}, \quad i_{pC} = 2500e^{j120^\circ} \text{ А}.$$

С учетом выражений (35) выражения для составляющих H_Z и H_R напряжённости МП, создаваемого каждым из реакторов в точке D на оси OX при $y = 0$ м, будут иметь вид

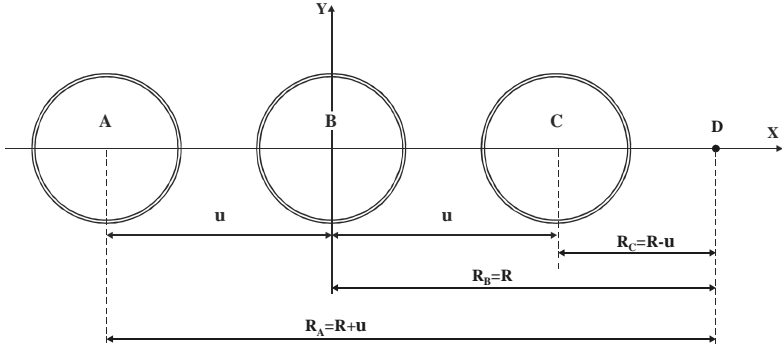


Рис. 25. Расположение группы трёхфазных реакторов

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{H}_{ZA}(R, z) &= \frac{\dot{I}_{\varphi A} R_O}{4\pi} \sum_{i=0}^{N-1} \int_0^{2\pi} \frac{R_O - (R+u) \cos \varphi}{\left(\sqrt{(z+in)^2 + (R+u)^2 + R_O^2 - 2(R+u)R_O \cos \varphi} \right)^3} d\varphi, \\
 \dot{H}_{ZB}(R, z) &= \frac{\dot{I}_{\varphi B} R_O}{4\pi} \sum_{i=0}^{N-1} \int_0^{2\pi} \frac{R_O - R \cos \varphi}{\left(\sqrt{(z+in)^2 + R^2 + R_O^2 - 2RR_O \cos \varphi} \right)^3} d\varphi, \\
 \dot{H}_{ZC}(R, z) &= \frac{\dot{I}_{\varphi C} R_O}{4\pi} \sum_{i=0}^{N-1} \int_0^{2\pi} \frac{R_O - (R-u) \cos \varphi}{\left(\sqrt{(z+in)^2 + (R-u)^2 + R_O^2 - 2(R-u)R_O \cos \varphi} \right)^3} d\varphi, \\
 \dot{H}_{RA}(R, z) &= \frac{\dot{I}_{\varphi A} R_O}{4\pi} \sum_{i=0}^{N-1} \int_0^{2\pi} \frac{(z+in) \cos \varphi}{\left(\sqrt{(z+in)^2 + (R+u)^2 + R_O^2 - 2(R+u)R_O \cos \varphi} \right)^3} d\varphi, \\
 \dot{H}_{RB}(R, z) &= \frac{\dot{I}_{\varphi B} R_O}{4\pi} \sum_{i=0}^{N-1} \int_0^{2\pi} \frac{(z+in) \cos \varphi}{\left(\sqrt{(z+in)^2 + R^2 + R_O^2 - 2RR_O \cos \varphi} \right)^3} d\varphi, \\
 \dot{H}_{RC}(R, z) &= \frac{\dot{I}_{\varphi C} R_O}{4\pi} \sum_{i=0}^{N-1} \int_0^{2\pi} \frac{(z+in) \cos \varphi}{\left(\sqrt{(z+in)^2 + (R-u)^2 + R_O^2 - 2(R-u)R_O \cos \varphi} \right)^3} d\varphi,
 \end{aligned} \right\} (37)$$

где $\dot{I}_{\varphi A} = 2499,82$ А, $\dot{I}_{\varphi B} = 2499,82e^{-j120^\circ}$ А, $\dot{I}_{\varphi C} = 2499,82e^{j120^\circ}$ А – составляющие \dot{I}_{φ_j} полного тока \dot{I}_{pj} реактора j -й фазы.

При определении составляющей $H_{\varphi ij}$ из выражений (5) и (8) для a_j , $\cos\alpha_{1j} - \cos\alpha_{2j}$ и a'_j можно записать:

$$\left. \begin{aligned}
 a_A(R, \varphi) &= \sqrt{R_0^2 + (R+u)^2 - 2R_0(R+u)\cos\varphi}, \\
 a_B(R, \varphi) &= \sqrt{R_0^2 + R^2 - 2R_0R\cos\varphi}, \\
 a_C(R, \varphi) &= \sqrt{R_0^2 + (R-u)^2 - 2R_0(R-u)\cos\varphi}, \\
 \cos\alpha_{1A} - \cos\alpha_{2A} &= \frac{z+h_p}{\sqrt{(z+h_p)^2 + R_0^2 + (R+u)^2 - 2R_0(R+u)\cos\varphi}} - \\
 &\quad - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R_0^2 + (R+u)^2 - 2R_0(R+u)\cos\varphi}}, \\
 \cos\alpha_{1B} - \cos\alpha_{2B} &= \frac{z+h_p}{\sqrt{(z+h_p)^2 + R_0^2 + R^2 - 2R_0R\cos\varphi}} - \\
 &\quad - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R_0^2 + R^2 - 2R_0R\cos\varphi}}, \\
 \cos\alpha_{1C} - \cos\alpha_{2C} &= \frac{z+h_p}{\sqrt{(z+h_p)^2 + R_0^2 + (R-u)^2 - 2R_0(R-u)\cos\varphi}} - \\
 &\quad - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R_0^2 + (R-u)^2 - 2R_0(R-u)\cos\varphi}}, \\
 a'_A(R, \varphi) &= \frac{a^2 + (R+u)^2 - R_0^2}{2a_A}, \quad a'_B(R, \varphi) = \frac{a^2 + R^2 - R_0^2}{2a_B}, \\
 a'_C(R, \varphi) &= \frac{a^2 + (R-u)^2 - R_0^2}{2a_C}.
 \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Тогда из (9) получим:

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{H}_{\varphi uA}(R, z) &= \frac{j_{ZA} \Delta R_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a'_A(R, \varphi)}{a_A(R, \varphi)|(R+u)|} (\cos\alpha_{1A} - \cos\alpha_{2A}) d\varphi, \\
 \dot{H}_{\varphi uB}(R, z) &= \frac{j_{ZB} \Delta R_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a'_B(R, \varphi)}{a_B(R, \varphi)|R|} (\cos\alpha_{1B} - \cos\alpha_{2B}) d\varphi, \\
 \dot{H}_{\varphi uC}(R, z) &= \frac{j_{ZC} \Delta R_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a'_C(R, \varphi)}{a_C(R, \varphi)|(R-u)|} (\cos\alpha_{1C} - \cos\alpha_{2C}) d\varphi,
 \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

где $J_{ZA} = 125,92 \text{ A/m}^2$, $J_{ZB} = 125,92e^{-j120^\circ} \text{ A/m}^2$, $J_{ZC} = 125,92e^{j120^\circ} \text{ A/m}^2$.

На рис. 26, а, б, в показаны кривые распределения модулей составляющих H_{Zj} , H_{Rj} и $H_{\varphi ij}$ напряжённости МП, создаваемого токами трёхфазной группы реакторов с $u = 2 \text{ м}$ на уровне $z = 0,1 \text{ м}$ при изменении R от -4 до 4 м . Зоны перекрытия составляющих H_{Zi} на этом уровне содержат лишь низко интенсивные значения составляющих этих напряжённостей, создаваемых токами соседних реакторов. Аналогичная картина с зонами перекрытия как для составляющих H_{Rj} , так и для составляющих $H_{\varphi ij}$. Поэтому для рассматриваемого уровня z напряжённость МП в зоне нахождения реактора j -й фазы определяется практически только составляющими поля, создаваемого токами этого реактора.

Суммарные значения составляющих результирующего поля определяются по выражениям

$$\dot{H}_Z = \sum_{j=A}^C \dot{H}_{Zj}, \quad \dot{H}_R = \sum_{j=A}^C \dot{H}_{Rj}, \quad \dot{H}_{\varphi i} = \sum_{j=A}^C \dot{H}_{\varphi ij}. \quad (40)$$

Следует отметить, что для рассмотренного реактора с малым шагом намотки $n = 3,85 \text{ см}$ значения составляющих H_{Zj} и H_{Rj} превышают значения составляющих $H_{\varphi ij}$ более чем на три порядка. В этом случае, пренебрегая составляющими $H_{\varphi ij}$, можно считать, что напряжённость МП, создаваемого токами реактора, имеет эллиптическую поляризацию, действующее значение которой определяется как действующее значение по большей полуоси эллипса [3, 4]:

$$H_{max} = \sqrt{\frac{1}{2}(H_Z^2 + H_R^2) + \frac{1}{2}\sqrt{(H_Z^2 + H_R^2)^2 - 4H_Z^2 H_R^2 \sin^2(\psi_Z - \psi_R)}}, \quad (41)$$

где ψ_Z и ψ_R – начальные фазные углы составляющих \dot{H}_Z и \dot{H}_R .

В случае, когда значения $H_{\varphi ij}$ соизмеримы с величинами H_{Zj} и H_{Rj} , определение действующего значения напряжённости МП, имеющего эллипсоидную поляризацию, производится по методике, изложенной в [4].

На рис. 26, г даны кривые изменения модулей суммарных составляющих H_Z и H_R , а также модуля результирующей напряжённости H_{max} МП, создаваемого токами трёхфазной группы реакторов на уровне $z = 0,1 \text{ м}$.

На рис. 27 показаны кривые распределения составляющих H_{Zj} (а), H_{Rj} (б), H_Z , H_R и H_{max} (в) напряжённости МП, создаваемого токами

трёхфазной группы реакторов на уровне $z = 2,5$ м. Для этого, более удалённого от верхнего витка реактора, уровни составляющие H_{Zj} и H_{Rj} соседних реакторов оказывают значительное влияние на суммарные составляющие H_Z и H_R , а значит, и на результирующую напряжённость H_{max} МП.

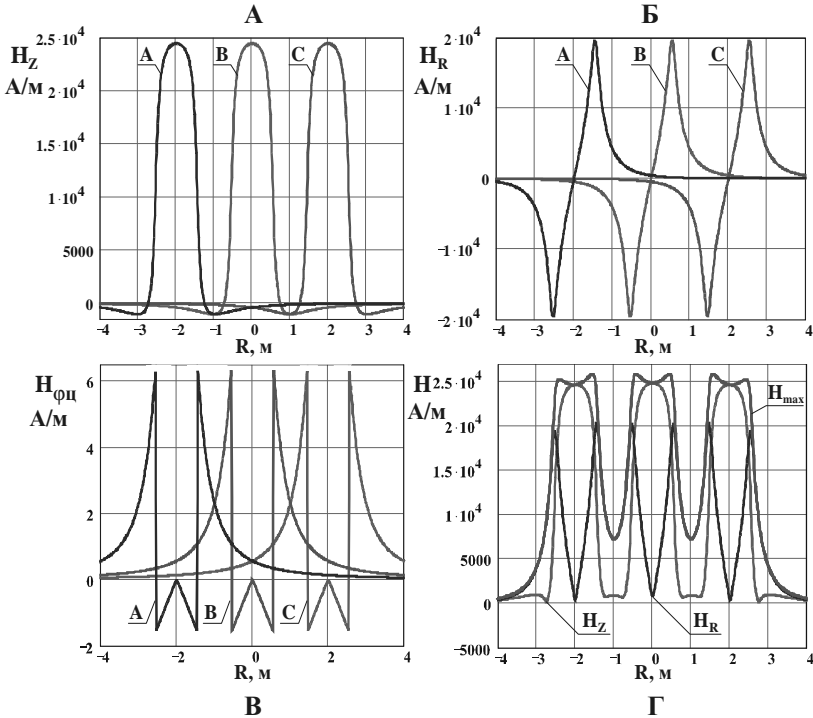


Рис. 26. Распределение модулей H_{Zi} (а), H_{Ri} (б), $H_{\phi_{цi}}$ (в), H_Z , H_R и H_{max} (г) напряжённости МП, создаваемого токами группы трёхфазных реакторов на уровне $z = 0,1$ м

На рис. 27, г приведены кривые распределения напряжённости H_{max} на уровнях 1, 1,5 и 2 м, а на рис. 28 – на уровнях 3, 3,5, 4,15 и 5 м.

Максимальные значения H_{max} соответствуют $R = \pm 1,8$ м \div $\pm 2,0$ м и составляют: 3029 А/м ($z = 1$ м), 1260 А/м ($z = 1,5$ м), 621 А/м ($z = 2$ м), 345 А/м ($z = 2,5$ м), 208 А/м ($z = 3$ м), 134 А/м ($z = 3,5$ м), 80 А/м ($z = 4,15$ м) и 62 А/м ($z = 4,5$ м).

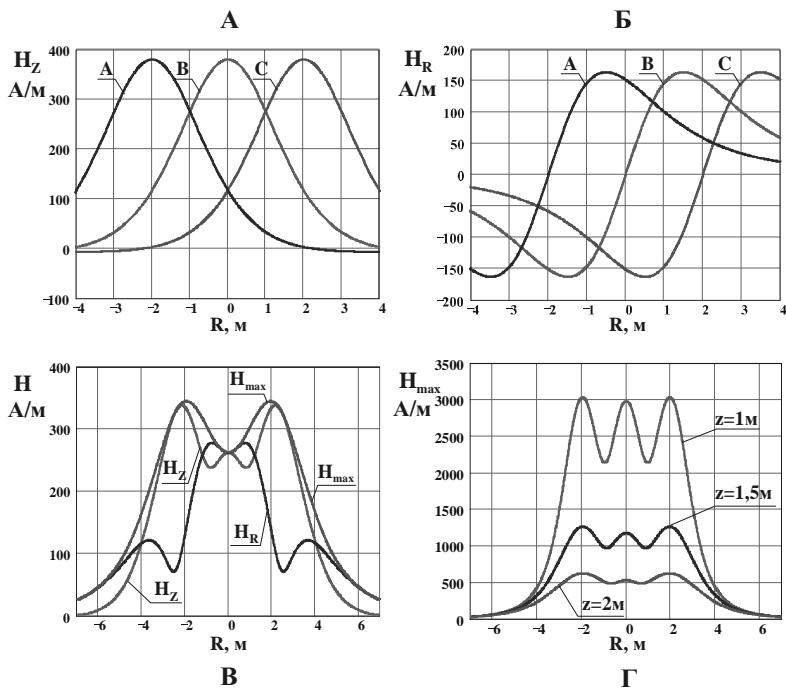


Рис. 27. Распределение H_{zj} (а), H_{Rj} (б), H_z , H_R , H_{max} (в) на уровне $z = 2,5$ м и H_{max} (г) на уровнях 1, 1,5 и 2 м

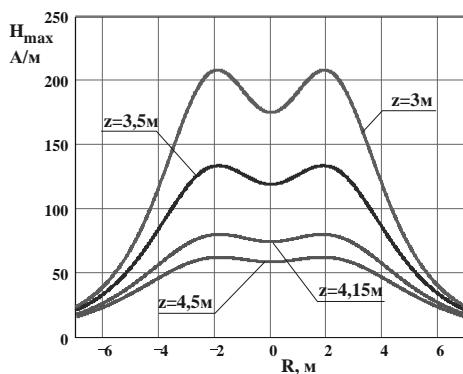


Рис. 28. Распределение H_{max} на уровнях 3, 3,5, 4,15 и 4,5 м

Уравнения (9) с учётом (5) и (8), а также (35) могут быть представлены в декартовой системе координат. В соответствии с рис. 29 можно записать:

$$R_A = \sqrt{(x+u)^2 + y^2}, \quad R_B = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad R_C = \sqrt{(x-u)^2 + y^2}. \quad (42)$$

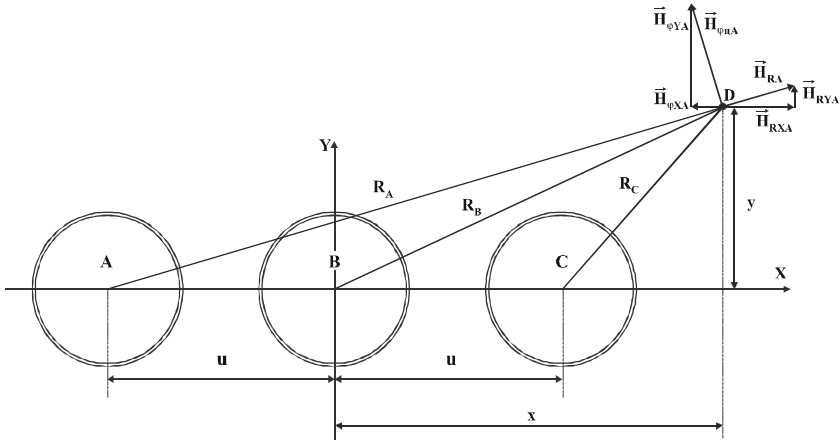


Рис. 29. К определению составляющих напряжённости МП трёхфазной группы реакторов в декартовой системе координат

При переходе из цилиндрической в декартовую систему координат составляющая \vec{H}_{Zi} не изменяется, а каждая из составляющих \vec{H}_{Rj} и $\vec{H}_{\phi ij}$ раскладывается на составляющие \vec{H}_{RXj} и \vec{H}_{RYj} и $\vec{H}_{\phi Xj}$ и $\vec{H}_{\phi Yj}$. Из подобия треугольников $H_{RA} - H_{RYA} - H_{RXA}$, $H_{\phi iA} - H_{\phi YA} - H_{\phi XA}$ и $R_A - (x+u) - y$ для реактора фазы А получим:

$$\begin{aligned} H_{RAX} &= H_{RA} \frac{x+u}{R_A}, \quad H_{RAY} = H_{RA} \frac{y}{R_A}, \\ H_{\phi AX} &= H_{\phi iA} \frac{y}{R_A}, \quad H_{\phi AY} = H_{\phi iA} \frac{x+u}{R_A}. \end{aligned} \quad (43)$$

Аналогично находятся составляющие для реакторов фаз В и С:

$$\left. \begin{aligned} H_{RBX} &= H_{RB} \frac{x}{R_B}, H_{RBY} = H_{RB} \frac{y}{R_B}, \\ H_{\varphi BX} &= H_{\varphi uB} \frac{y}{R_B}, H_{\varphi BY} = H_{\varphi uB} \frac{x}{R_B}, \\ H_{RCX} &= H_{RC} \frac{x-u}{R_C}, H_{RCY} = H_{RC} \frac{y}{R_C}, \\ H_{\varphi CX} &= H_{\varphi uC} \frac{y}{R_C}, H_{\varphi CY} = H_{\varphi uC} \frac{x-u}{R_C}. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Тогда выражения (5) и (8) с учётом (42) преобразуются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} a_j &= \sqrt{R_0^2 + R_j^2 - 2R_0R_j \cos \varphi}, \quad a'_j = \frac{a_j^2 + R_j^2 - R_0^2}{2a_j}, \\ r_{1j} &= \sqrt{z^2 + R_0^2 + R_j^2 - 2R_0R_j \cos \varphi}, \\ r_{2j} &= \sqrt{(z + h_p)^2 + R_0^2 + R_j^2 - 2R_0R_j \cos \varphi}, \\ \cos \alpha_{1j} - \cos \alpha_{2j} &= \frac{z + h_p}{r_{2j}} - \frac{z}{r_{1j}}, \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

где j – индекс фазы, а уравнение (9) примет вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_{\varphi AX} &= \frac{J_{ZA} \Delta R_0}{4\pi} \frac{y}{R_A^2} \int_0^{2\pi} \frac{a'_A}{a_A} \left(\frac{z + h_p}{r_{2A}} - \frac{z}{r_{1A}} \right) d\varphi, \\ \dot{H}_{\varphi AY} &= \frac{J_{ZA} \Delta R_0}{4\pi} \frac{x+u}{R_A^2} \int_0^{2\pi} \frac{a'_A}{a_A} \left(\frac{z + h_p}{r_{2A}} - \frac{z}{r_{1A}} \right) d\varphi, \\ \dot{H}_{\varphi BX} &= \frac{J_{ZB} \Delta R_0}{4\pi} \frac{y}{R_B^2} \int_0^{2\pi} \frac{a'_B}{a_B} \left(\frac{z + h_p}{r_{2B}} - \frac{z}{r_{1B}} \right) d\varphi, \\ \dot{H}_{\varphi BY} &= \frac{J_{ZB} \Delta R_0}{4\pi} \frac{x}{R_B^2} \int_0^{2\pi} \frac{a'_B}{a_B} \left(\frac{z + h_p}{r_{2B}} - \frac{z}{r_{1B}} \right) d\varphi, \\ \dot{H}_{\varphi CX} &= \frac{J_{ZC} \Delta R_0}{4\pi} \frac{y}{R_C^2} \int_0^{2\pi} \frac{a'_C}{a_C} \left(\frac{z + h_p}{r_{2C}} - \frac{z}{r_{1C}} \right) d\varphi, \\ \dot{H}_{\varphi CY} &= \frac{J_{ZC} \Delta R_0}{4\pi} \frac{x-u}{R_C^2} \int_0^{2\pi} \frac{a'_C}{a_C} \left(\frac{z + h_p}{r_{2C}} - \frac{z}{r_{1C}} \right) d\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Введём обозначение

$$r_{ji} = \sqrt{(z + in)^2 + R_j^2 + R_O^2 - 2R_j R_O \cos \varphi}, \quad (47)$$

тогда из уравнения (35) с учётом (42), (45) и (46) получим:

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_{Zj} &= \frac{\dot{I}_{\varphi j} R_O}{4\pi} \sum_{i=0}^{N-1} \int_0^{2\pi} \frac{R_O - R_j \cos \varphi}{r_{ji}^3} d\varphi, \\ \dot{H}_{RAX} &= \frac{\dot{I}_{\varphi A} R_O}{4\pi} \frac{x+u}{R_A} \sum_{i=0}^{N-1} \int_0^{2\pi} \frac{(z+in) \cos \varphi}{r_A^3} d\varphi, \\ \dot{H}_{RAY} &= \frac{\dot{I}_{\varphi A} R_O}{4\pi} \frac{y}{R_A} \sum_{i=0}^{N-1} \int_0^{2\pi} \frac{(z+in) \cos \varphi}{r_A^3} d\varphi, \\ \dot{H}_{RBX} &= \frac{\dot{I}_{\varphi B} R_O}{4\pi} \frac{x}{R_B} \sum_{i=0}^{N-1} \int_0^{2\pi} \frac{(z+in) \cos \varphi}{r_B^3} d\varphi, \\ \dot{H}_{RBY} &= \frac{\dot{I}_{\varphi B} R_O}{4\pi} \frac{y}{R_B} \sum_{i=0}^{N-1} \int_0^{2\pi} \frac{(z+in) \cos \varphi}{r_B^3} d\varphi, \\ \dot{H}_{RCX} &= \frac{\dot{I}_{\varphi C} R_O}{4\pi} \frac{x-u}{R_C} \sum_{i=0}^{N-1} \int_0^{2\pi} \frac{(z+in) \cos \varphi}{r_C^3} d\varphi, \\ \dot{H}_{RCY} &= \frac{\dot{I}_{\varphi C} R_O}{4\pi} \frac{y}{R_C} \sum_{i=0}^{N-1} \int_0^{2\pi} \frac{(z+in) \cos \varphi}{r_C^3} d\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Полные значения составляющих по осям OX , OY и OZ находятся по выражениям, аналогичным (40):

$$\dot{H}_X = \sum_{j=A}^C (\dot{H}_{RjX} + \dot{H}_{\varphi jX}), \quad \dot{H}_Y = \sum_{j=A}^C (\dot{H}_{RjY} + \dot{H}_{\varphi jY}), \quad \dot{H}_Z = \sum_{j=A}^C \dot{H}_{Zj}. \quad (49)$$

Определение модуля полного вектора напряжённости МП по модулям составляющих H_X , H_Y и H_Z с использованием выражения, аналогичного (36),

$$H = \sqrt{H_X^2 + H_Y^2 + H_Z^2} \quad (50)$$

будет давать значительную погрешность.

Рассмотрим распределение напряжённости МП, создаваемого трёхфазной группой реакторов на прямой, проходящей параллельно оси OX на уровне $z = 2,5$ м ($y = 0$ м). В каждой точке этой прямой составляющая $\dot{H}_Y = 0$. Распределение модулей составляющих \dot{H}_X и \dot{H}_Z показано на рис. 30, а. При определении результирующей напряжённости МП по выражению (50) получаем кривую распределения H (см. рис. 30, а). Однако выражение (50) справедливо только для полей, имеющих линейную поляризацию. В рассматриваемом случае МП имеет эллиптическую поляризацию и модуль результирующей напряжённости следует определять по выражению, аналогичному (41):

$$H_{max} = \sqrt{\frac{1}{2}(H_Z^2 + H_X^2) + \frac{1}{2}\sqrt{(H_Z^2 + H_X^2)^2 - 4H_Z^2 H_X^2 \sin^2(\psi_Z - \psi_X)}}. \quad (51)$$

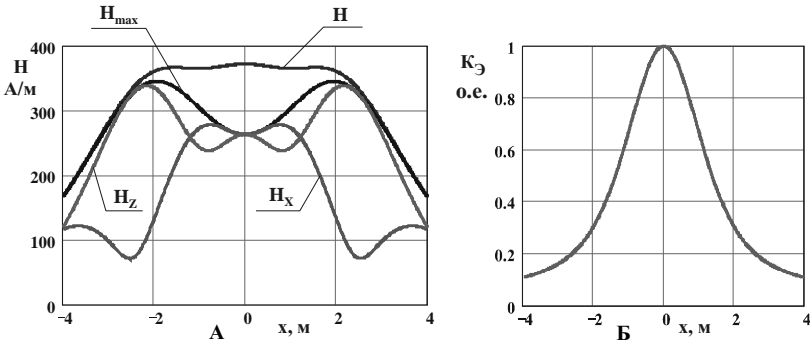


Рис. 30. Кривые распределения H_X , H_Z , H , H_{max} и K_3 при $z = 2,5$ м, $y = 0$ м и изменении x от -4 до 4 м

Кривые распределения напряжённости H_{max} и H значительно отличаются друг от друга (см. рис. 30, а). На рис. 30, б дана кривая распределения коэффициента эллипсности K_3 напряжённости МП, определяемого по выражению

$$K_3 = \frac{H_{min}}{H_{max}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}(H_Z^2 + H_X^2) - \frac{1}{2}\sqrt{(H_Z^2 + H_X^2)^2 - 4H_Z^2 H_X^2 \sin^2(\psi_Z - \psi_X)}}}{\sqrt{\frac{1}{2}(H_Z^2 + H_X^2) + \frac{1}{2}\sqrt{(H_Z^2 + H_X^2)^2 - 4H_Z^2 H_X^2 \sin^2(\psi_Z - \psi_X)}}}.$$

В точке $x = 0$ м составляющие \dot{H}_X и \dot{H}_Z имеют значения

$$\dot{H}_X = 262,4e^{-j30^\circ} \text{ А/м и } \dot{H}_Z = 263,3e^{-j120^\circ} \text{ А/м,}$$

т.е. модули составляющих практически равны, а фазные углы отличаются на 90° . В этом случае эллиптическая поляризация МП практически (поскольку H_X и H_Z всё же отличаются друг от друга на $0,9$ А/м) переходит в круговую, когда $H_{max} = H_X = H_Z$, и значения модуля напряжённости H , полученные по выражению (50), превышают значения H_{max} , рассчитанные по выражению (51), в $\sqrt{2}$ раз.

В случае, когда координата y расчётной точки отлична от нуля, у результирующего вектора напряжённости МП появляется третья составляющая \dot{H}_Y и поляризация поля становится трёхмерной, переходя из эллиптической в эллипсоидную.

Наиболее точно расчёт модуля результирующего вектора напряжённости МП, имеющего эллипсоидную поляризацию, проводится по выражению для мгновенных значений, но с использованием действующих значений вместо амплитудных:

$$H(t) = \sqrt{H_X^2 \sin^2(\omega t + \psi_X) + H_Y^2 \sin^2(\omega t + \psi_Y) + H_Z^2 \sin^2(\omega t + \psi_Z)}, \quad (52)$$

где H_i – действующие значения составляющих напряжённости МП.

Для точки с координатами $x = 2$ м, $y = 1$ м и $z = 2,5$ м составляющие \dot{H}_X , \dot{H}_Y и \dot{H}_Z имеют следующие значения:

$$\dot{H}_X = 109,3e^{-j95^\circ} \text{ А/м, } \dot{H}_Y = 116,5e^{j142^\circ} \text{ А/м и } \dot{H}_Z = 242,4e^{j139^\circ} \text{ А/м.}$$

Подставляя значения модулей и фазных углов составляющих в выражение (52), получим кривую изменения $H(t)$ для $0 \leq t \leq 0,02$ с, показанную на рис. 31.

Максимальное H_{max} значение кривой $H(t)$ является действующим значением напряжённости МП по большей полуоси эллипсоида.

Для нахождения H_{max} необходимо знать время t_{max} , в момент которого $H(t)$ проходит положение H_{max} , чтобы потом по выражению

$$H_{max} = H(t_{max})$$

определить значение H_{max} .

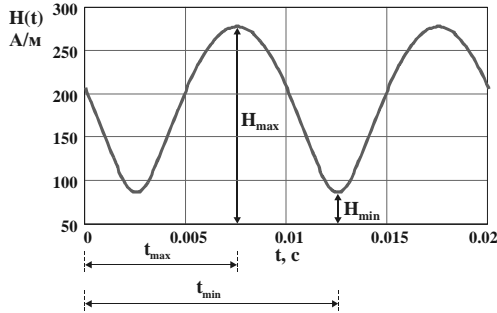


Рис. 31. К определению действующего значения напряжённости МП по большей полуоси эллипсоида

Для нахождения экстремумов функции $H(t)$ следует взять её производную по времени

$$\frac{dH(t)}{dt} = \frac{\omega H_X^2 \sin 2(\omega t + \psi_X) + \omega H_Y^2 \sin 2(\omega t + \psi_Y) + \omega H_Z^2 \sin 2(\omega t + \psi_Z)}{\sqrt{H_X^2 \sin^2(\omega t + \psi_X) + H_Y^2 \sin^2(\omega t + \psi_Y) + H_Z^2 \sin^2(\omega t + \psi_Z)}} = \frac{F(t)}{H(t)},$$

приравнять производную к нулю и найти корни полученного уравнения t_{\max} и t_{\min} , соответствующие времени прохождения функцией $H(t)$ максимальных и минимальных значений.

Из последнего выражения нетрудно определить, что

$$F(t) = \omega H_X^2 \sin 2(\omega t + \psi_X) + \omega H_Y^2 \sin 2(\omega t + \psi_Y) + \omega H_Z^2 \sin 2(\omega t + \psi_Z) = \frac{dH^2(t)}{dt},$$

т.е. функция $F(t)$ является производной от квадрата функции $H(t)$ и $\frac{dH(t)}{dt}$ обращается в нуль только в том случае, когда $F(t) = 0$.

На рис. 32 в выравненном по оси ординат масштабе показаны кривые изменения функций $H(t)$, $\frac{dH(t)}{dt}$ и $F(t)$.

Как видно из рис. 32, функции $F(t)$ и $\frac{dH(t)}{dt}$ имеют одинаковые корни t_{\max} и t_{\min} , которые соответствуют прохождению функцией $H(t)$ максимальных и минимальных значений. Поэтому проще и быстрее находится время экстремумов $t_{ЭК}$ для функции $H(t)$ при решении уравнения $F(t) = 0$.

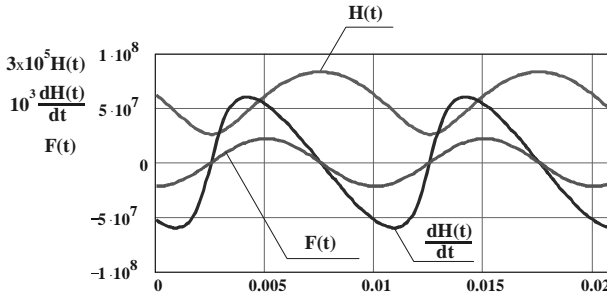


Рис. 32. К определению времени t_{max} и t_{min} прохождения функции $H(t)$ экстремальных значений

Поскольку $H(t)$ имеет два экстремума H_{max} и H_{min} , то корни уравнения $F(t) = 0$ следует определять для интервалов времени $0,005 \leq t \leq 0,01$ с ($t_{ЭК1}$) и $0,01 \leq t \leq 0,015$ с ($t_{ЭК2}$). После нахождения значений $t_{ЭК1}$ и $t_{ЭК2}$ последние подставляются в уравнение (52) или в целях сокращения времени расчёта в уравнение

$$H^2(t) = H_X^2 \sin^2(\omega t + \psi_X) + H_Y^2 \sin^2(\omega t + \psi_Y) + H_Z^2 \sin^2(\omega t + \psi_Z) \quad (53)$$

и определяются величины $H(t_{ЭК1})$ и $H(t_{ЭК2})$ или $H^2(t_{ЭК1})$ и $H^2(t_{ЭК2})$.

Значение H_{max} определяется по уравнению

$$H_{max} = \max[H(t_{ЭК1}); H(t_{ЭК2})] \quad (54)$$

или уравнению

$$H_{max} = \sqrt{\max[H^2(t_{ЭК1}); H^2(t_{ЭК2})]}. \quad (55)$$

Эллипсоидная поляризация переходит в сферическую при равенстве модулей составляющих напряжённости $H_X = H_Y = H_Z = H$ и сдвиге на комплексной плоскости составляющих крайних комплекс-векторов относительно среднего комплекс-вектора на углы $\pm 60^\circ$ или $\pm 120^\circ$. В этом случае модуль результирующего вектора напряжённости МП $H_{max} = \sqrt{1,5} H$. Если же этот модуль определить по выражению (50), то получим $H = \sqrt{3} H$. Таким образом, как для двумерного, так и для трёхмерного поля определение модуля результирующего вектора по выражению (50) приводит к увеличению его значения в сравнении с H_{max} в $\sqrt{2}$ раз.

На рис. 33 показано распределение напряжённости H_{max} МП, создаваемого трёхфазной реакторной группой на уровне $z = 2,5$ м при изменении x от -4 до 4 м для координаты y , равной $0, 0,5, 1, 2$ и 3 м.

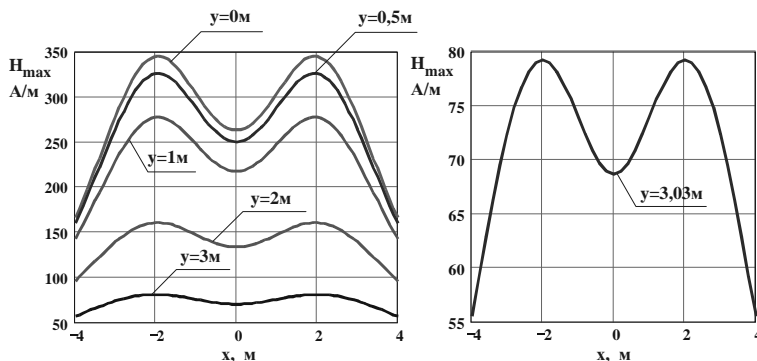


Рис. 33. Распределение напряжённости МП, создаваемого трёхфазной реакторной группой на уровне $z = 2,5$ м при изменении x от -4 до 4 м для $y = 0, 0,5, 1, 2, 3$ и $3,03$ м

Максимальные значения H_{max} достигаются при $y = 0$ м, т.е. в плоскости, проходящей через оси реакторов, и составляют для уровня $z = 2,5$ м при $x = \pm 1,95$ м 348 А/м. По мере удаления от этой плоскости (увеличения $|y|$) напряжённость МП уменьшается и для $y = 3$ м максимум H_{max} составляет 81 А/м при $x = \pm 2$ м. H_{max} не превышает значения 80 А/м при $y = 3,03$ м.

Как и следовало ожидать, МП симметрично относительно оси OY , т.к. $H_{max}(+x) = H_{max}(-x)$.

На рис. 34, а дано распределение напряжённости H_{max} МП на уровне $z = 2,5$ м при изменении y от -2 до 2 м для координаты x равной $0, 1, 2, 3, 4, 5$ и $5,5$ м. Максимум H_{max} приходится на координаты $x = 2$ м, $y = 0$ м и составляет 348 А/м. Значение 80 А/м не превышает при $x = 5,15$ м (см. рис. 34, б).

Как видно из рис. 34, МП, создаваемое токами трёхфазной реакторной группы, симметрично относительно оси OX , поскольку $H_{max}(+y) = H_{max}(-y)$.

На рис. 35 показаны кривые распределения H_{max} на уровнях $z = 0$ м (рис. 35, а, уровень верхнего витка обмотки реактора) и $z = -0,5$ м (рис. 35, б, уровень середины обмотки реактора) для $y = 1, 2, 3$ и $3,5$ м при изменении x от -4 м до 4 м. Для всех рассмотренных значений y и x H_{max} на уровне $z = 0$ м превышает соответствующие значения H_{max} на уровне

$z = -0,5$ м. При значениях y , равных 1 и 2 м, кривые $H_{max}(x)$ имеют три максимума: при $x_1 = 0$ м и $x_2 \approx \pm 2$ м. С увеличением y максимумы $H_{max}(x)$ при $x = 0$ м сглаживаются и при $y = 3$ м и $3,5$ м отсутствуют.

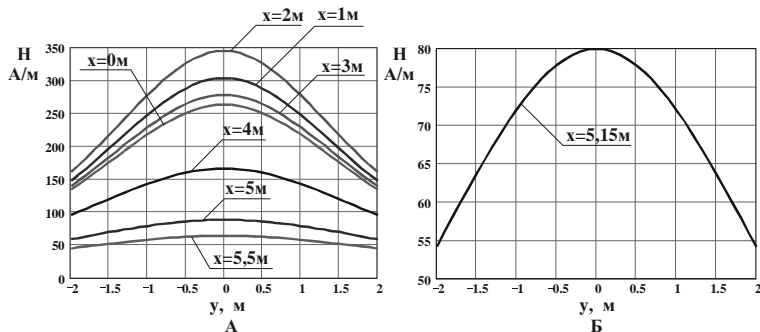


Рис. 34. Распределение H_{max} на уровне $z = 2,5$ м при изменении y от -2 до 2 м для координаты x , равной $0, 1, 2, 3, 4, 5, 5,15$ и $5,5$ м

В табл. 2 показаны значения H_{max} для x_1 и x_2 на каждом из рассмотренных уровней y при $z = 0$ м.

Таблица 2. Значения H_{max} для x_1 и x_2 на уровнях y при $z = 0$ м

$y, \text{ м}$	$x_1, \text{ м}$	$H_{max}(x_1), \text{ А/м}$	$x_2, \text{ м}$	$H_{max}(x_2), \text{ А/м}$
1,0	0	4233	$\pm 2,0$	4345
2,0	0	426	$\pm 2,1$	520
3,0	0	84	$\pm 2,3$	133
3,5	0	43	$\pm 2,45$	77

Как видно из рис. 35, кривые распределения H_{max} симметричны относительно оси OY .

На рис. 36 показаны кривые распределения H_{max} для $y = 1, 2, 3$ и $3,5$ м для $x_1 = 0$ м (рис. 36, а) и $x_2 = 2 \div 2,45$ м (рис. 36, б) в зависимости от координаты z . Если при $y = 1$ м максимумы H_{max} для $x = 0$ м (местонахождение оси среднего реактора, фаза В) и $x = \pm 2$ м (местонахождение осей крайних реакторов, фазы А и С) практически равны и приходятся на координаты $z \approx -0,1$ м (y верхнего витка обмотки) и $z \approx -0,9$ м (y нижнего витка обмотки), то с увеличением y максимумы напряжённости МП уменьшаются и удаляются от середины обмотки реакторов, причём H_{max} вдоль оси среднего реактора всегда меньше H_{max} вдоль осей крайних реакторов. Напряжённость МП не превышает значения 80 А/м при $y = 3,5$ м и $x = \pm 2,45$ м.

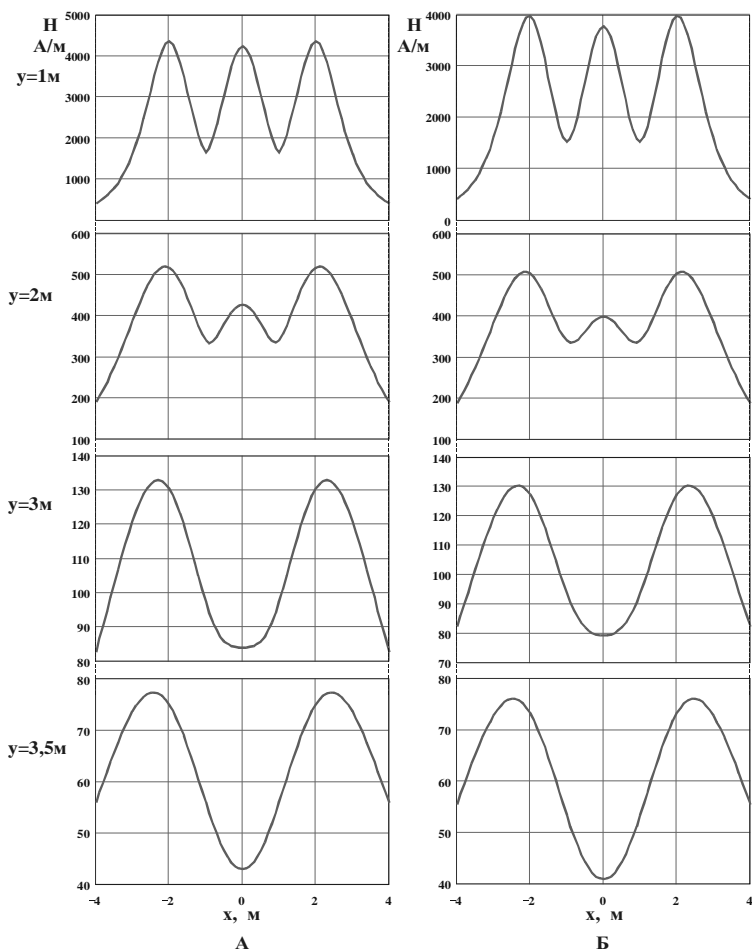


Рис. 35. Распределения H_{max} на уровнях $z = 0$ м (а) и $z = -0,5$ м (б) для $y = 1, 2, 3$ и $3,5$ м при изменении x от -4 до 4 м

На рис. 37, а приведены кривые распределения напряжённости H_{max} сбоку от трёхфазной реакторной группы на уровне $z = 0$ м ($z = -1$ м) для $x = 0,6, 3, 4, 5$ и $5,75$ м при изменении y от -2 до 2 м. Максимумы напряжённости МП находятся в плоскости, проходящей через оси обмоток реакторов, т.е. при $y = 0$ м. Кривые распределения H_{max} симметричны относительно оси OX .

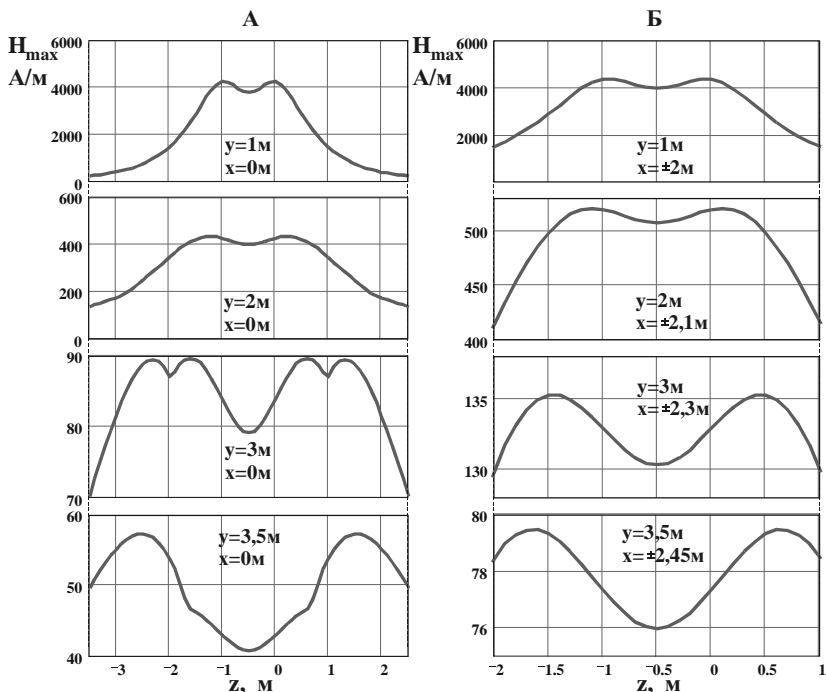


Рис. 36. Распределение H_{max} на уровнях $y = 1, 2, 3$ и $3,5$ м для $x_1 = 0$ м (а) и $x_2 = 2 + 2,45$ м (б) в зависимости от z

На рис. 37, б также показаны кривые распределения напряжённости H_{max} сбоку от трёхфазной реакторной группы для $x = 0,6, 3, 4, 5$ и $5,75$ м, но при $y = 0$ м и изменении z от $-1,5$ до $0,5$ м. Изменение x от $0,6$ до 4 м сопровождается сближением максимумов напряжённости МП, т.е. максимумы H_{max} перемещаются к оси реакторной группы. При дальнейшем увеличении x максимумы расходятся, удаляясь от оси реакторной группы.

Магнитное поле реакторного блока, состоящего из нескольких реакторных групп. Если реакторный блок содержит несколько, допустим K , трёхфазных реакторных групп, причём расстояние между соседними группами равно v , как показано на рис. 38, то выражения (42), (45) – (48) примут вид

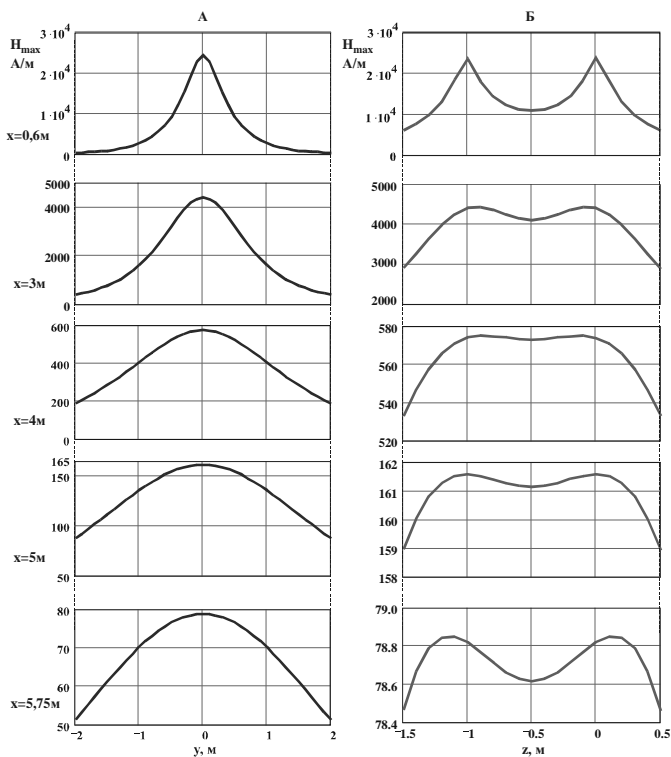


Рис. 37. Распределение H_{max} сбоку от реакторной группы

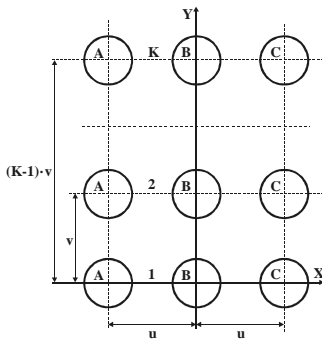


Рис. 38. Реакторный блок, состоящий из K трёхфазных реакторных групп

$$\begin{aligned}
 R_{sA} &= \sqrt{(x+u)^2 + (y-sv)^2}, & R_{sB} &= \sqrt{x^2 + (y-sv)^2}, \\
 R_{sC} &= \sqrt{(x-u)^2 + (y-sv)^2}, \\
 a_{sj} &= \sqrt{R_0^2 + R_{sj}^2 - 2R_0R_{sj} \cos \varphi}, & a'_{sj} &= \frac{a_{sj}^2 + R_{sj}^2 - R_0^2}{2a_{sj}}, \\
 r_{1sj} &= \sqrt{z^2 + R_0^2 + R_{sj}^2 - 2R_0R_{sj} \cos \varphi}, \\
 r_{2sj} &= \sqrt{(z+h_p)^2 + R_0^2 + R_{sj}^2 - 2R_0R_{sj} \cos \varphi}, \\
 \cos \alpha_{1sj} - \cos \alpha_{2sj} &= \frac{z+h_p}{r_{2sj}} - \frac{z}{r_{1sj}}, \\
 \dot{H}_{\varphi AX} &= \frac{j_{ZA} \Delta R_0}{4\pi} \sum_{s=0}^{K-1} \left[\frac{y-sv}{R_{sA}^2} \int_0^{2\pi} \frac{a'_{sA}}{a_{sA}} \left(\frac{z+h_p}{r_{2sA}} - \frac{z}{r_{1sA}} \right) d\varphi \right], \\
 \dot{H}_{\varphi AY} &= \frac{j_{ZA} \Delta R_0}{4\pi} \frac{x+u}{R_{sA}^2} \sum_{s=0}^{K-1} \left[\int_0^{2\pi} \frac{a'_{sA}}{a_{sA}} \left(\frac{z+h_p}{r_{2sA}} - \frac{z}{r_{1sA}} \right) d\varphi \right], \\
 \dot{H}_{\varphi BX} &= \frac{j_{ZB} \Delta R_0}{4\pi} \sum_{s=0}^{K-1} \left[\frac{y-sv}{R_{sB}^2} \int_0^{2\pi} \frac{a'_{sB}}{a_{sB}} \left(\frac{z+h_p}{r_{2sB}} - \frac{z}{r_{1sB}} \right) d\varphi \right], \\
 \dot{H}_{\varphi BY} &= \frac{j_{ZB} \Delta R_0}{4\pi} \frac{x}{R_{sB}^2} \sum_{s=0}^{K-1} \left[\int_0^{2\pi} \frac{a'_{sB}}{a_{sB}} \left(\frac{z+h_p}{r_{2sB}} - \frac{z}{r_{1sB}} \right) d\varphi \right], \\
 \dot{H}_{\varphi CX} &= \frac{j_{ZC} \Delta R_0}{4\pi} \sum_{s=0}^{K-1} \left[\frac{y-sv}{R_{sC}^2} \int_0^{2\pi} \frac{a'_{sC}}{a_{sC}} \left(\frac{z+h_p}{r_{2sC}} - \frac{z}{r_{1sC}} \right) d\varphi \right], \\
 \dot{H}_{\varphi CY} &= \frac{j_{ZC} \Delta R_0}{4\pi} \frac{x-u}{R_{sC}^2} \sum_{s=0}^{K-1} \left[\int_0^{2\pi} \frac{a'_{sC}}{a_{sC}} \left(\frac{z+h_p}{r_{2sC}} - \frac{z}{r_{1sC}} \right) d\varphi \right], \\
 r_{sji} &= \sqrt{(z+in)^2 + R_{sj}^2 + R_0^2 - 2R_{sj}R_0 \cos \varphi}, \\
 \dot{H}_{Zj} &= \frac{i_{\varphi j} R_0}{4\pi} \sum_{s=0}^{K-1} \sum_{i=0}^{N-1} \int_0^{2\pi} \frac{R_0 - R_{sj} \cos \varphi}{r_{sj}^3} d\varphi,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{H}_{RAX} &= \frac{\dot{I}_{\varphi A} R_O}{4\pi} \sum_{s=0}^{K-1} \left[\frac{x+u}{R_{sA}} \sum_{i=0}^{N-1} \int_0^{2\pi} \frac{(z+in)\cos\varphi}{r_{sA}^3} d\varphi \right], \\ \dot{H}_{RAY} &= \frac{\dot{I}_{\varphi A} R_O}{4\pi} \sum_{s=0}^{K-1} \left[\frac{y-sv}{R_{sA}} \sum_{i=0}^{N-1} \int_0^{2\pi} \frac{(z+in)\cos\varphi}{r_{sA}^3} d\varphi \right], \\ \dot{H}_{RBX} &= \frac{\dot{I}_{\varphi B} R_O}{4\pi} \sum_{s=0}^{K-1} \left[\frac{x}{R_{sB}} \sum_{i=0}^{N-1} \int_0^{2\pi} \frac{(z+in)\cos\varphi}{r_{sB}^3} d\varphi \right], \\ \dot{H}_{RBY} &= \frac{\dot{I}_{\varphi B} R_O}{4\pi} \sum_{s=0}^{K-1} \left[\frac{y-sv}{R_{sB}} \sum_{i=0}^{N-1} \int_0^{2\pi} \frac{(z+in)\cos\varphi}{r_{sB}^3} d\varphi \right], \\ \dot{H}_{RCX} &= \frac{\dot{I}_{\varphi C} R_O}{4\pi} \sum_{s=0}^{K-1} \left[\frac{x-u}{R_{sC}} \sum_{i=0}^{N-1} \int_0^{2\pi} \frac{(z+in)\cos\varphi}{r_{sC}^3} d\varphi \right], \\ \dot{H}_{RCY} &= \frac{\dot{I}_{\varphi C} R_O}{4\pi} \sum_{s=0}^{K-1} \left[\frac{y-sv}{R_{sC}} \sum_{i=0}^{N-1} \int_0^{2\pi} \frac{(z+in)\cos\varphi}{r_{sC}^3} d\varphi \right]. \end{aligned}$$

Комплексные значения модулей составляющих определяются по выражению (49), а величина H_{max} – по формулам (52), (54) или (53), (55).

На рис. 39 показана схема расположения реакторного блока, состоящего из трёх ($K = 3$) одинаковых трёхфазных реакторных групп с расстоянием между группами $v = 2$ м. Реакторы одноимённых фаз включены последовательно.

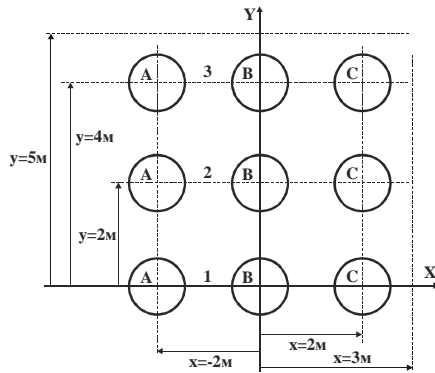


Рис. 39. Реакторный блок, состоящий из трёх трёхфазных реакторных групп

На рис. 40 приведены кривые распределения составляющих H_x , H_y , H_z и полного H_{max} модуля напряжённости МП на уровне $z = 2,5$ м для $y = 2$ м (рис. 40, а – ось средней группы реакторов), $y = 1$ м и $y = 3$ м (рис. 40, б – середины промежутков между средним и крайними группами реакторов), а также $y = 0$ м и $y = 4$ м (рис. 40, в – оси крайних групп реакторов), при изменении x от -4 м до 4 м.

В рассмотренной области пространства основной вклад в значение H_{max} вносят составляющие H_x и H_z , составляющая H_y имеет малую величину, а при $y = 2$ м равна нулю.

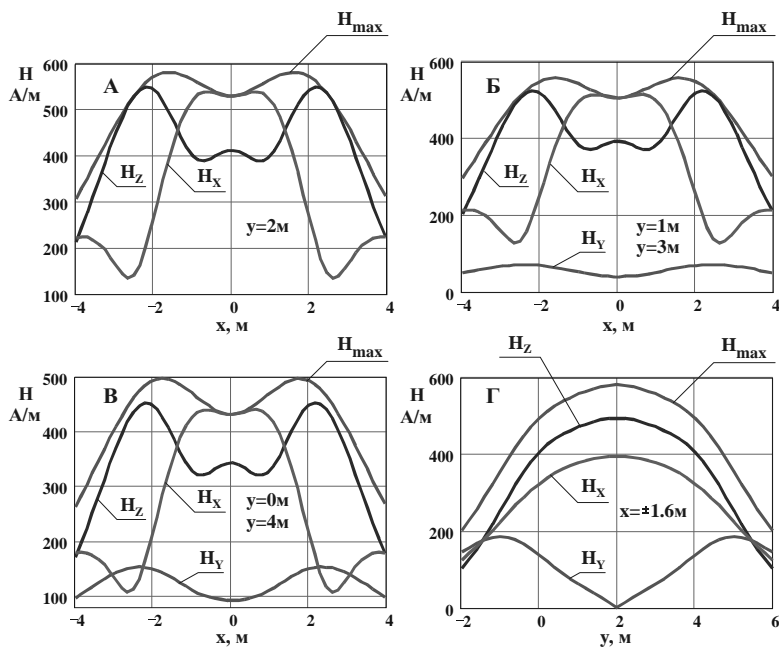


Рис. 40. Распределения H_x , H_y , H_z и H_{max} на уровне $z = 2,5$ м для $y = 2$ м (а), $y = 1$ м и $y = 3$ м (б), $y = 0$ м и $y = 4$ м (в) при изменении x от -4 до 4 м

На уровне $z = 2,5$ м максимумы H_{max} достигаются для $y = 2$ м и $y = 1$ м (3 м) при $x = \pm 1,6$ м и составляют соответственно 582 А/м и 558 А/м. На осях крайних групп реакторов ($y = 0$ м и $y = 4$ м) максимум H_{max} достигается при $x = \pm 1,75$ м и равен 497 А/м. Кривые напряжённости МП симметричны относительно оси OY .

На рис. 40, г показаны кривые изменения H_x , H_y , H_z и H_{max} для $z = 2,5$ м при $x = \pm 1,6$ м и изменении y от -2 до 6 м. Кривые симметричны относительно оси OX . Максимум $H_{max} = 582$ А/м достигается при $y = 2$ м, т.е. на оси средней группы реакторов.

На рис. 41, а даны кривые распределения H_{max} для $y = 2$ м, на уровнях $z = 3$ м, 4 м и 5 м при изменении x от -4 до 4 м. $H_{max} < 80$ А/м при $z = 5,6$ м (см. рис. 41, б).

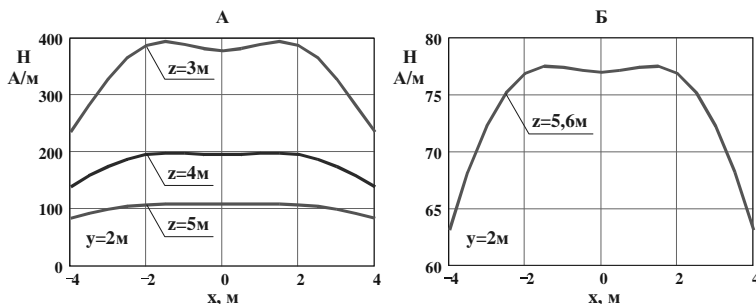


Рис. 41. Распределения H_{max} для $y = 2$ м, на уровнях $z = 3, 4, 5$ и $5,6$ м при изменении x от -4 до 4 м

На рис. 42, а показано изменение H_{max} на уровне $z = 0$ м для $y = 1$ м и $y = 3$ м (середина промежутка между средней и крайней группами реакторов), а также для $y = 5, 6, 7$ и $7,75$ м сбоку од реакторного блока.

Для $y = 1$ м (3 м) H_{max} имеет наибольшее значение 4022 А/м при $x = \pm 1,6$ м, а наименьшее 3125 А/м – при $x = 0$ м. Для $y = 5$ м H_{max} максимальна при $x = 2$ м. С увеличением y максимумы H_{max} расходятся в положительную и отрицательную стороны по оси OX – $H_{max}(x)$. Кривые $H_{max}(x)$ симметричны относительно оси OY . В табл. 3 приведены значения y и x , соответствующие максимумам $H_{max}(x)$, а также H_{max} для $y = 1$ м (3 м) и $x = 0$ м.

Таблица 3. Значения y и x , соответствующие максимумам H_{max}

y , м	x , м	$H_{max}(x)$, А/м	$H_{max}(z)$, А/м
1 (3)	0	3125	7750
1 (3)	$\pm 1,6$	4022	6450
5	$\pm 2,0$	4458	4464
6	$\pm 2,1$	570	570
7	$\pm 2,4$	157	159
7,75	$\pm 2,6$	75,5	77,7

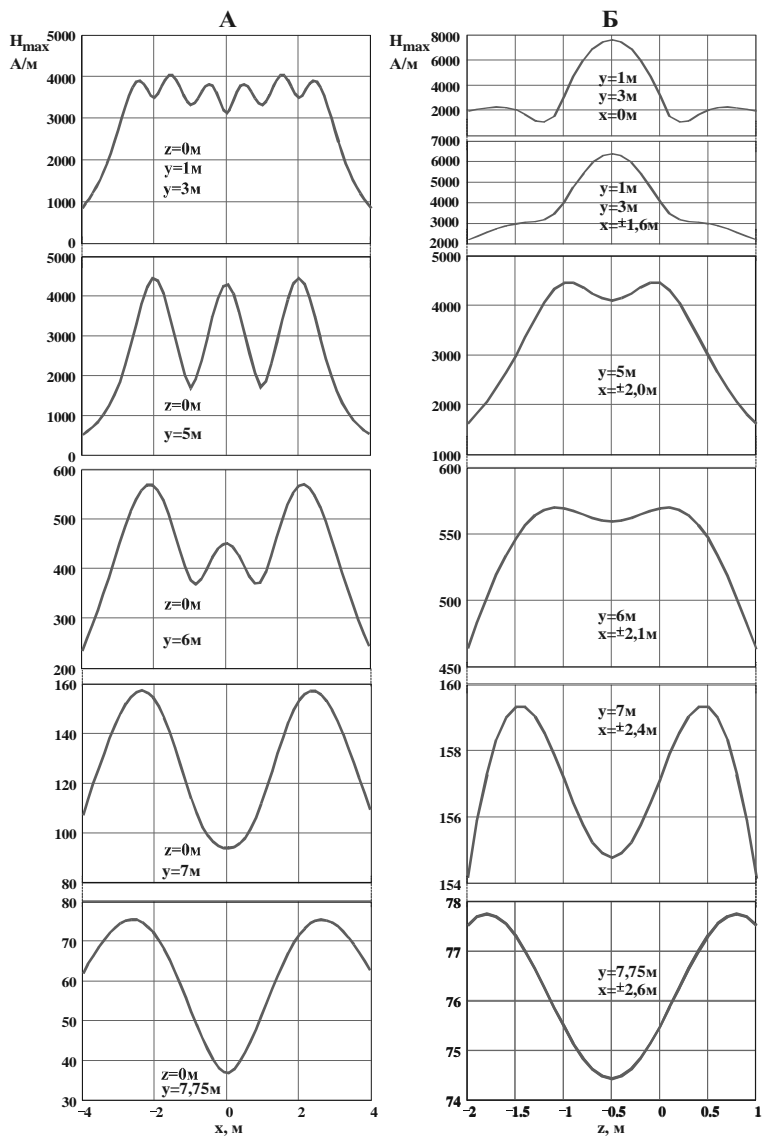


Рис. 42. Изменение $H_{\max}(x)$ на уровне $z = 0$ м (а) и $H_{\max}(z)$ (б) для $y = 1$ (3), 5, 6, 7 и 7,75 м

На рис. 42, б даны кривые изменения H_{max} по оси $OZ - H_{max}(z)$, для координат y и x , соответствующих максимумам $H_{max}(x)$, а также для $y = 1$ м (3 м) и $x = 0$ м. В табл. 3 также приведены максимальные значения $H_{max}(z)$.

Как видно из рис. 42, б, $H_{max}(z)$ для середины расстояний между средней и крайними группами реакторов ($y = 1$ м и $y = 3$ м) имеет максимум на середине высоты реактора ($z = -0,5$ м). Вне реакторного блока для $y = 5$ м наибольшие значения $H_{max}(z)$ находятся на уровне торцов обмотки реактора ($z = 0$ м и $z = -1$ м). С увеличением y максимумы $H_{max}(z)$ расходятся, удаляясь по оси OZ от середины обмотки реактора далеко за торцы обмотки.

При $y = 7,75$ м максимумы как $H_{max}(x)$, так и $H_{max}(z)$ не превышают 80 А/м.

На рис. 43, а показано распределение напряжённости $H_{max}(y)$ на уровне $z = 0$ м для $x = -1$ м (середина расстояний между реакторами фаз А и В), $x = +1$ м (середина расстояний между реакторами фаз В и С) и $x = \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6$ и ± 7 м (справа и слева по оси OX от реакторного блока) при изменении y от -2 до 6 м.

При $x = \pm 1$ м и $x = \pm 3$ м $H_{max}(y)$ имеет три максимума при $y = 0$ м, $y = 2$ м и $y = 4$ м с преобладанием значения $H_{max}(y = 2$ м) на прямой, соединяющей оси реакторов средней фазы (фазы В). С увеличением модуля координаты x у кривой $H_{max}(y)$ остаётся только один максимум при $y = 2$ м, а максимумы, соответствующие осям реакторов крайних фаз, сглаживаются.

На рис. 43, б даны кривые изменения $H_{max}(z)$ для $y = 2$ м, $x = \pm 1, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6$ и ± 7 м и изменения координаты z от -2 до 1 м.

При $x = \pm 1$ м и $x = \pm 3$ м максимальные значения $H_{max}(z)$ находятся в области торцов обмоток средних реакторов. С увеличением модуля координаты x максимумы $H_{max}(z)$ смещаются от торцов к середине обмотки реактора, образуя один общий максимум.

В табл. 4 приведены величины максимумов $H_{max}(y)$ при $z = 0$ м и $H_{max}(z)$ при $y = 2$ м для рассмотренных значений координаты x справа и слева от реакторного блока.

Таблица 4. Величины максимумов $H_{max}(y)$ при $z = 0$ м и $H_{max}(z)$ при $y = 2$ м справа и слева от реакторного блока

x , м	$H_{max}(y)$, А/м	$H_{max}(z)$, А/м
± 1	7452	7731
± 3	4838	4967
± 4	909	946
± 5	330	335
± 6	149	150
± 7	77,3	77,5

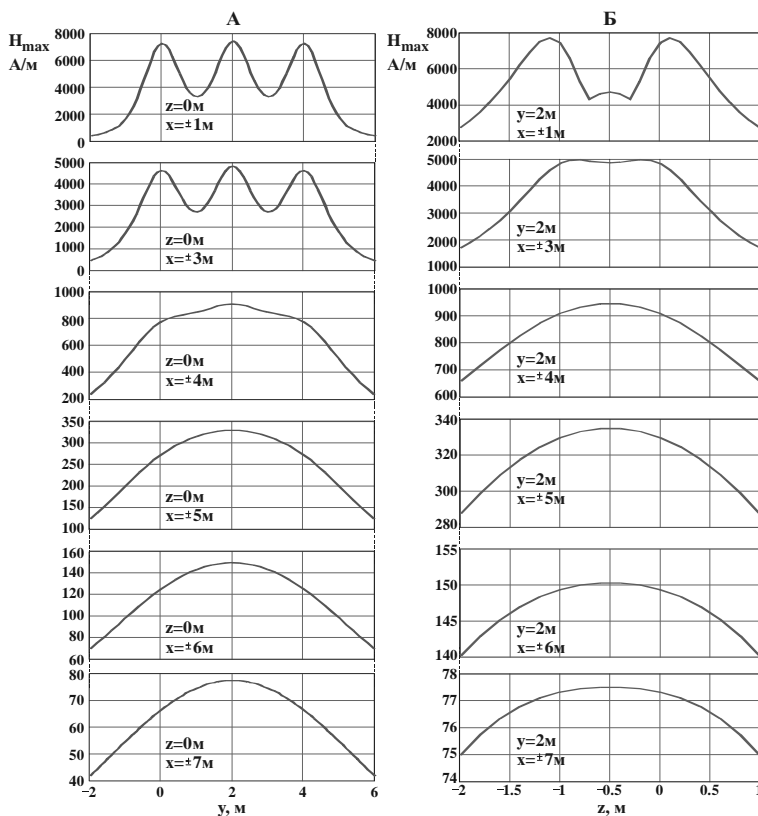


Рис. 43. Распределение напряжённости H_{max} справа и слева от реакторного блока

Заключение

Определение предельно допустимых расстояний от работающих реакторов, на которых соблюдается условие $H_{max} \leq 80$ А/м, для персонала, профессионально связанного с обслуживанием и эксплуатацией электроустановок в течение всего рабочего дня (8 часов), производится следующим образом.

В табл. 5 представлены полученные ранее расстояния от начала осей координат одного токоограничивающего реактора (см. рис. 23 и 24), одной трехфазной группы реакторов (см. рис. 28, 36 и 37) и трёх

трёхфазных групп реакторов (см. рис. 41, 42 и 43), на которых соблюдается условие $H_{max} \leq 80$ А/м.

Таблица 5. Расстояния от начала осей координат одного токоограничивающего реактора, одной трёхфазной группы реакторов и трёх трёхфазных групп реакторов, на которых соблюдается условие $H_{max} \leq 80$ А/м

Ось координат	Один реактор	1 трёхфаз. гр. реакт.	3 трёхфаз. гр. реакт.
OX , м	4,0	5,75	7,00
OY , м	4,0	3,50	7,75
OZ , м	4,6	4,15	5,60

Эти расстояния удобнее определить как расстояния от наружной поверхности обмотки реактора. Радиус наружной поверхности обмотки реактора РТОС-10-2500 составляет 0,6 м, тогда расстояния, указанные в табл. 5, уменьшаются:

- для одного реактора по осям OX и OY на 0,6 м;
- для одной трёхфазной группы реакторов по оси OX на 2,6 м, а по оси OY на 0,6 м;
- для трёх трёхфазных групп реакторов по оси OX на 2,6 м, а по оси OY на 4,6 м.

Расстояние по оси OZ вверх от плоскости верхнего витка обмотки реактора остаётся без изменений.

В табл. 6 представлены минимально допустимые расстояния от наружной поверхности обмотки одного реактора, одной трёхфазной группы и трёх трёхфазных групп реакторов: по бокам (\pm по оси OX), спереди – позади (\pm по оси OY) и сверху (по оси OZ), при которых соблюдается условие $H_{max} \leq 80$ А/м.

Таблица 6. Минимально допустимые расстояния, при которых соблюдается условие $H_{max} \leq 80$ А/м, от наружной поверхности обмотки одного реактора, одной трёхфазной группы и трёх трёхфазных групп реакторов

Положение	Один реактор	1 трёхфазн. гр. реакт.	3 трёхфазн. гр. реакт.
По бокам	3,4	3,15	4,40
Спереди – сзади	3,4	2,90	3,15
Сверху	4,6	4,15	5,60

На указанных в табл. 6 расстояниях от наружной поверхности обмоток блоков реакторов, состоящих из одного реактора, одной трёхфазной группы или трёх трёхфазных групп реакторов типа РТОС-10-2500, работающих при значении модуля фазного тока 2500 А, допустимо нахождение персонала, профессионально связанного с обслуживанием и эксплуатацией электроустановок, в течение полного рабочего дня – 8 часов.

Однако при таких уровнях напряжённости МП невозможно размещение как рабочих мест лиц, профессионально не связанных с обслуживанием и эксплуатацией электроустановок, так и рабочих мест, оснащённых электронным оборудованием и ПЭВМ.

Для таких рабочих мест требуются дополнительные мероприятия по снижению уровней напряжённости МП реакторов.

Библиографический список

1. **Выгодский М.Я.** Справочник по высшей математике. – М.: Наука, 1966. – 870 с.
2. **Яворский Б.М., Детлаф А.А.** Справочник по физике для инженеров и студентов вузов. – М.: Наука, 1977. – 944 с.
3. **Кац Р.А., Перельман Л.С.** Расчет электрического поля трехфазной линии электропередачи // Электричество. – 1978. – №1. – С. 16–19.
4. **Методы расчёта и измерения эллипсоидных магнитных полей / В.П. Дикой, А.Ю. Токарский, Ю.А. Иостсон, М.Ш. Мисриханов // Повышение эффективности работы энергосистем: Тр. ИГЭУ. – Вып. IV. –М.: Энергоатомиздат, 2001. – С. 215–222.**

УДК 621.314

Анализ численных методик расчета потерь в массивных деталях шунтирующих реакторов

*С.Н. Кадников, д-р техн. наук, С.В. Прокушев, канд. техн. наук,
В.Н. Башин, канд. техн. наук, М.А. Полумисков, инж.*

Проблемы снижения потерь и выявления опасных местных нагревов, вызванных потерями, являются одними из основных при проектировании реакторов. Для их решения требуются методики расчета потерь во всех металлических элементах реактора. Как правило, каждая методика направлена на расчет потерь не в каком-то одном элементе, а в некотором их классе. Авторами рассматривается расчет потерь в массивных деталях реактора, т.е. в элементах, толщина которых больше глубины проникновения переменного магнитного поля (бак, ярмовые балки, стяжные шпильки и т.д.).

Потери в массивных деталях шунтирующего реактора выражаются через напряженность магнитного (электрического) поля на их поверхностях по известным формулам [1]. Трудность, однако, здесь заключается в

том, что напряженность поля на этих поверхностях в общем случае заранее неизвестна и подлежит определению. Для ее численного нахождения, как правило, используют математические модели квазистационарного поля в идеальных проводниках. В рамках метода интегральных уравнений имеется четыре вида таких моделей, определяемых различными комбинациями следующих уравнений [2]:

$$\oint_S (\vec{i}_M \cdot \nabla_M K_{QM}) dS_M = 0 \quad (1)$$

или

$$\sigma_Q - 2 \oint_S \sigma_M ((\vec{n}_Q \cdot \nabla_Q K_{QM}) - k_1) dS_M - 2p \cdot \oint_S (\vec{n}_Q \cdot \vec{i}_M) K_{QM} dS_M = -2(\vec{n}_Q \cdot \vec{E}_Q^\delta), \quad (2)$$

относительно плотности электрических зарядов σ , и

$$p \cdot \oint_S [\vec{n}_Q \times \vec{i}_M] K_{QM} dS_M + \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \oint_S \sigma_M [\vec{n}_Q \times \nabla_Q K_{QM}] dS_M = [\vec{n}_Q \times \vec{E}_Q^\delta] \quad (3)$$

или

$$\vec{i}_Q - 2 \cdot \oint_S [\vec{n}_Q \times [\nabla_Q K_{QM} \times \vec{i}_M]] dS_M + 2k_2 p \cdot \oint_S [[\vec{n}_Q \times \vec{i}_M] \times \vec{n}_Q] K_{QM} dS_M + \\ + 2k_2 \cdot \oint_S \sigma_M [[\vec{n}_Q \times \nabla_Q K_{QM}] \times \vec{n}_Q] dS_M = 2 \cdot [\vec{n}_Q \times \vec{H}_Q^\delta] + 2 \cdot k_2 [\vec{n}_Q \times \vec{E}_Q^\delta] \quad (4)$$

относительно плотности поверхностного магнитного тока \vec{i} . Здесь S – поверхность идеального проводника; \vec{n}_Q – единичный вектор, нормальный к S и направленный от идеального проводника; $K_{QM} = 1/(4\pi \cdot r_{QM})$; r_{QM} – расстояние между точками Q и M ; $p = j\omega\mu_0$; $j = \sqrt{-1}$; ω – круговая частота; k_1 и k_2 – произвольные, неравные нулю константы; \vec{H}_Q^δ и \vec{E}_Q^δ – соответственно напряженности внешнего магнитного и электрического поля.

Комбинации этих уравнений дают следующие системы интегральных уравнений:

- 1) первого рода (1), (3);
- 2) смешанного типа (1), (4);

3) смешанного типа (2), (3);

4) второго рода (2), (4).

Представитель интерес провести сопоставление вычислительной эффективности моделей, основанных на решении данных систем, с тем чтобы выявить модель, позволяющую достичь требуемой точности решения при наименьших затратах машинных ресурсов и времени счета.

При сопоставлении моделей полагаем, что системы интегральных уравнений решаются методом конечных сумм с кусочно-постоянной аппроксимацией вторичных источников [3]. Выбор в пользу данного метода сделан в связи с тем, что он является одним из наиболее часто используемых методов решения интегральных уравнений.

В соответствии с методом конечных сумм интегральные уравнения (1) – (4) заменяются соответственно следующими алгебраическими уравнениями:

$$\sum_k (\vec{i}_k \cdot \vec{I}_k^1(Q)) = 0 \quad (5)$$

или

$$\sigma_j - 2 \sum_k \sigma_k (\vec{n}_j \cdot \vec{I}_k^1(Q)) + 2k_1 \sum_k \sigma_k \cdot \Delta S_k - 2p \sum_k (\vec{n}_j \cdot \vec{i}_k) \cdot I_k^3(Q) = -2(\vec{n}_j \cdot \vec{E}_Q^\delta), \quad (6)$$

относительно плотности электрических зарядов σ , и

$$p \sum_k [\vec{n}_j \times \vec{i}_k] \cdot I_k^3(Q) + \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \sum_k \sigma_k [\vec{n}_j \times \vec{I}_k^1(Q)] = [\vec{n}_j \times \vec{E}_Q^\delta] \quad (7)$$

или

$$\begin{aligned} & \vec{i}_j - 2 \cdot \sum_k (\vec{n}_j \cdot \vec{i}_k) \cdot \vec{I}_k^1(Q) - 2 \cdot \sum_k \vec{i}_k (\vec{n}_j \cdot \vec{I}_k^1(Q)) + \\ & + 2k_2 p \cdot \sum_k \vec{n}_j \cdot (\vec{n}_j \cdot \vec{i}_k) \cdot I_k^3(Q) - 2k_2 p \cdot \sum_k \vec{i}_k \cdot I_k^3(Q) + \\ & + 2k_2 \cdot \sum_k \sigma_k [[\vec{n}_j \times \vec{I}_k^1(Q)] \times \vec{n}_j] = 2 \cdot [\vec{n}_j \times \vec{H}_Q^\delta] + 2 \cdot k_2 [\vec{n}_j \times \vec{E}_Q^\delta], \end{aligned} \quad (8)$$

относительно плотности поверхностного магнитного тока \vec{i} . Здесь

$$\vec{I}_k^1(Q) = \int_{S_k} \nabla_Q K_{QM} dS_M, \quad I_k^3(Q) = \int_{S_k} K_{QM} dS_M, \quad S_k - \text{плоские граничные}$$

элементы, на которые разбита поверхность S , σ_k и \vec{i}_k – значения плотностей на граничном элементе S_k .

Таким образом, решение системы интегральных уравнений первого рода [(1), (3)], смешанного типа [(1), (4)], смешанного типа [(2), (3)] и второго рода [(2), (4)] свелось соответственно к решению систем алгебраических уравнений: [(5), (7)], [(5), (8)], [(6), (7)] и [(6), (8)].

Исследуем влияние малого возмущения входных данных на решение полученных алгебраических задач. Предметом наших рассмотрений будут именно малые возмущения. Это вызвано тем, что суммарный эффект влияния ошибок округления, неизбежных при численном решении задачи, сводится в основном к малым возмущениям.

Будем использовать спектральную оценку числа обусловленности, поскольку она, как правило, наилучшим образом характеризует обусловленность задач [4]:

$$\Delta = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}, \quad (9)$$

где λ_{max} – максимальное собственное число матрицы СЛАУ, а λ_{min} – минимальное.

Вычислительные свойства рассматриваемых алгебраических задач существенно зависят от геометрии идеального проводника. Теоретическое исследование этих свойств не представляется возможным. Поэтому проведем их численное исследование для простейшего случая – кубического проводника, который, тем не менее, часто встречается в практике (например, бак реактора кубической формы). Исследуем зависимость числа обусловленности Δ от числа граничных элементов N .

При дискретизации областей, занятых вторичными источниками, разобьем границу раздела сред S на одинаковые плоские квадратные элементы S_k (см. рис. 1).

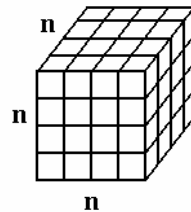


Рис. 1. Разбиение кубического проводника

Для расчета собственных чисел матриц СЛАУ используем ускоренный QR-алгоритм [5]. Результаты расчета зависимости числа обусловленности от числа граничных элементов приведены в табл. 1 и на рис. 2.

Таблица 1. Числа обусловленности матриц при различных разбиениях кубического проводника

Разб. сторон n	Число гранич. эл-тов N	Число обусловленности Δ			
		1-я модель	2-я модель	3-я модель	4-я модель
4	96	$1,7 \cdot 10^4$	$1,1 \cdot 10^3$	$2,8 \cdot 10^4$	3,4
8	384	$2,3 \cdot 10^4$	$1,1 \cdot 10^3$	$6,1 \cdot 10^4$	3,8
16	1536	$4,2 \cdot 10^4$	$4,2 \cdot 10^3$	$1,3 \cdot 10^5$	4,0
32	6144	$1,3 \cdot 10^5$	$3,53 \cdot 10^4$	$2,8 \cdot 10^5$	4,2

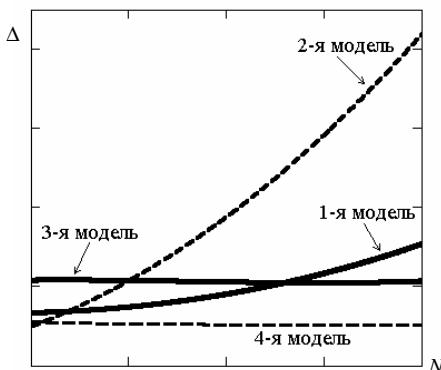


Рис. 2. Скорость роста числа обусловленности с ростом N

Из полученных результатов видно, что наихудшими характеристиками по величине числа обусловленности и динамике его роста обладает СЛАУ [(5), (7)], заменяющая систему интегральных уравнений первого рода [(1), (3)]. Наилучшими характеристиками обладают СЛАУ [(6), (8)] и [(6), (7)], заменяющие соответственно системы интегральных уравнений второго рода [(2), (4)] и смешанного типа [(2), (3)].

Анализируя полученные данные, можно заключить, что скорость роста числа обусловленности определяется главным образом типом уравнения относительно σ . Поэтому использование уравнения первого рода (1) в этом смысле крайне нежелательно.

Полученные системы линейных алгебраических уравнений [(5), (7)], [(5), (8)], [(6), (7)] и [(6), (8)] дают приближенное x_N решение исходной краевой задачи, которое стремится к точному решению x^* с ростом числа элементов разбиения N . Очевидно, что при прочих равных условиях предпочтение должно отдаваться той СЛАУ, которая обеспечивает за-

данную точность решения $|x^* - x_N| < \varepsilon$ при наименьшем числе элементов разбиения N . Исследуем скорость сходимости приближенных решений x_N с ростом N для предложенных типов полевых моделей.

Таблица 2. Сходимость решений СЛАУ с ростом числа элементов разбиения N

Разб. сторон n	Число гранич. эл-тов N	Относительная погрешность решения Err_N			
		1-я модель	2-я модель	3-я модель	4-я модель
4	96	31,67%	8,13%	2,34%	1,79%
8	384	65,57%	15,87%	0,53%	0,39%
16	1536	54,21%	12,59%	0,18%	0,11%

Здесь относительная погрешность Err_N определялась следующим образом:

$$Err_N = \max\{Err1_N, Err2_N\},$$

$$Err1_N = \frac{\|\sigma^{2N} - \sigma^N\|_{L_2}}{\|\sigma^{2N}\|_{L_2}}, \quad Err2_N = \frac{\|\bar{i}^{2N} - \bar{i}^N\|_{L_2}}{\|\bar{i}^{2N}\|_{L_2}},$$

где $\|y\|_{L_2} = \left(\oint_S |y_M|^2 dS_M \right)^{1/2}$, $y = 5, i$, индекс N указывает, что решение

получено при разбиении поверхности S на N элементов, а индекс $2N$ – при удвоенном разбиении.

Анализируя данные, приведенные в табл. 2, можно сделать вывод о том, что сходимость приближенного решения с ростом числа скалярных неизвестных также определяется типом уравнения относительно σ . Системы, содержащие уравнение первого рода (1) относительно σ , не проявляют признаков сходимости, тогда как системы, основанные на уравнении второго рода (2), сходятся достаточно быстро.

Тот факт, что из табл. 2 сходимость вторичных источников для 1-й и 2-й модели не прослеживается, не означает их непригодность для практического использования. Так, исследования показали, что напряженности поля (которые и представляют непосредственный интерес), полученные всеми четырьмя моделями, в различных точках при одном N расходятся незначительно.

Выводы

При расчете потерь в массивных деталях шунтирующих реакторов численный расчет напряженности магнитного поля на их поверхностях целесообразно основывать на решении системы граничных интегральных уравнений второго рода (2), (4). Использование систем интегральных уравнений других типов является неэффективным и ведет к увеличению затрат машинных ресурсов и времени счета.

Библиографический список

1. **Лейтес Л.В.** Электромагнитные расчеты трансформаторов и реакторов. – М.: Энергия, 1981. – 391 с.
2. **Кадников С.Н.** Метод интегральных уравнений для расчета электромагнитного поля / Иван. гос. энерг. ун-т. – Иваново, 2003. – 340 с.
3. **Михлин С.Г., Смолицкий Х.Л.** Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. – М.: Наука, 1965. – 384 с.
4. **Райс Дж.** Матричные вычисления и математическое обеспечение. – М.: Мир, 1984. – 264 с.
5. **Воеводин В.В.** Вычислительные основы линейной алгебры. – М.: Наука, 1977. – 304 с.

УДК 621.316.925

Разработка цифровых трансформаторов тока опорной конструкции 110 – 220 кВ

В.Н. Гречухин, В.Д. Лебедев, кандидаты техн. наук

Описание проблемы. Электромагнитные трансформаторы тока (ТТ) применяются в энергетике на всех напряжениях от 6 до 1150 кВ и обеспечивают на станциях и подстанциях информацией о первичном токе системы управления и учета электроэнергии, такие как РЗА, ПА, АСКУЭ, измерения и систему диспетчеризации.

Трансформаторы тока имеют следующие достоинства и недостатки.

Достоинства

- Высокий класс точности (0,2 – 0,5 %). В лабораторных ТТ, где нет высоковольтной изоляции, достигим класс точности 0,05 % и выше.
- Простота и надежность ТТ в сетях 6 – 10 – 35 – 110 кВ.
- Температурная стабильность характеристик ТТ.

Недостатки

- Насыщение магнитопровода электромагнитного ТТ апериодической составляющей тока короткого замыкания (КЗ) и отсутствие передачи информации о первичном токе в первые периоды аварийного переходного процесса, когда эта информация наиболее нужна системам РЗА и ПА (погрешности трансформации тока достигают в этом режиме 90 %). Следует отметить, что этот известный недостаток ТТ в рамках электромагнитного принципа измерения тока исправлен быть не может (постоянный ток не трансформируется).

- Проблемы с высоковольтной изоляцией, на что указывает неблагоприятная статистика аварий трансформаторов тока класса 500 – 750 кВ на электростанциях и подстанциях РАО «ЕЭС России» и Минатома в последние годы.

Тенденции развития электроэнергетики России в настоящее время таковы, что к существующим системам релейной защиты, противоаварийной автоматики, измерений и учета на станциях и подстанциях добавляются цифровые (микропроцессорные) системы РЗА, ПА, АСКУЭ, измерения и диспетчеризации. А это приводит к росту нагрузки на трансформаторы тока и вследствие этого к ухудшению класса точности ТТ, эксплуатируемых в энергетике России.

Экономические условия функционирования энергопредприятий и энергосистем приводят к необходимости повышения точности учета электроэнергии, цифровые (микропроцессорные) системы позволяют это сделать, однако недостаточно высокий класс точности ТТ является тормозом на этом пути.

Перед заводскими конструкторами ставится задача разработать ТТ более высокого класса точности с большей нагрузочной способностью. Удовлетворение этих требований приводит либо к росту массогабаритных показателей (больше железа, больше меди и всего остального), что нежелательно по условиям конкуренции, либо – к более напряженному использованию высоковольтной изоляции, что, в принципе, снижает надежность и срок службы ТТ, но по законам теории вероятности.

Идея создания нового трансформатора тока [1 – 3]. Идея состоит в создании условий для работы трансформатора тока с наивысшей точностью. При этом обеспечивается высоковольтная изоляция и передача цифровой информации о токе с высокого потенциала на потенциал земли по оптоволоконному кабелю, а нагрузочная способность обеспечивается на потенциале земли (в основании ТТ или на щите управления) усиленными секциями 1 А (5 А) (наращиваются по необходимости в процессе эксплуатации). Недостаток ТТ, связанный с насыщением, исправляется магнитотранзисторным преобразователем тока.

Выполнена разработка магнитотранзисторного преобразователя тока 10 кВ на номинальный ток 1 кА, выполнен экспериментальный образец, в котором реализована вышеизложенная идея в цифровом виде.

Экспериментальный образец был испытан в испытательном центре. Было проведено 4 серии опытов: 2 серии токами до 120 % номинального и 2 серии токами короткого замыкания до 40 кА с аperiodической составляющей. По результатам испытаний достигнута, как отмечено в протоколах, высокая точность измерительного канала (0,2 (0,5 %) и трансформация всего спектра тока короткого замыкания, включая аperiodическую составляющую релейным каналом экспериментального образца.

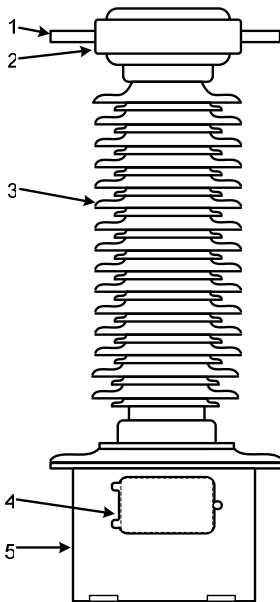


Рис. 1. Высоковольтный цифровой трансформатор тока с цифровым выходным сигналом по оптоволоконному кабелю на шит для ЦРЗА, ЦПА, цифровых измерений и аналоговым током (1 или 5 А) по медному кабелю для традиционных РЗА, ПА, измерений

Краткое техническое описание. Техническое решение по созданию освобожденных от необходимости обеспечения высоковольтной изоляции цифровых трансформаторов тока (ЦТТ) 110 – 750 кВ базируется на использовании классического электромагнитного трансформатора тока. При этом вторичная обмотка ТТ нагружена на шунт, аналогово-цифровой преобразователь и соединена с первичным проводом, а изоляцию и передачу информации обеспечивает оптоволоконно. В этих условиях ТТ обеспечивает наилучшую точность и стабильность характеристик. А недоста-

ток ТТ, связанный с насыщением магнитопровода апериодической составляющей тока КЗ, компенсируется применением магнитотранзисторного преобразователя тока, реализующего закон полного тока (первое уравнение Максвелла). Таким образом, простота, точность и стабильность выгодно отличают ЦТТ от аналогов.

ЦТТ выполняется на базе емкостного (индуктивного) трансформатора напряжения, классического электромагнитного трансформатора тока и магнитотранзисторного преобразователя тока с высоковольтной изоляцией и передачей информации с помощью цифрового сигнала по оптоволоконному кабелю под управлением микропроцессора.

Цифровой трансформатор тока предназначен для нужд электроэнергетики как перспективное изделие для снабжения информацией о первичном токе цифровых систем релейной защиты, автоматики, измерений, телемеханики и диспетчерского управления и аналоговых систем АСКУЭ, измерений, РЗА и ПА, для чего используются цифроаналоговые преобразовательные блоки с токовым выходом 1 или 5 А; при этом необходимая нагрузочная способность обеспечивается наращиванием количества преобразовательных блоков на щите управления или непосредственно в низковольтной части ЦТТ.

Высоковольтный цифровой трансформатор тока (см. рис. 1) состоит из высоковольтной части 2, включенной в расщелку первичного провода 1, конструктивно закрепленной в верхней части изолятора 3 емкостного или индуктивного трансформатора напряжения класса 110 – 750 кВ и низковольтной части 4, расположенной в нише корпуса электромагнитного блока 5 в основании изолятора. Информационный обмен между частями ЦТТ осуществляется по оптоволоконным линиям, проходящим внутри изолятора.

Информация выдается потребителю в любом цифровом двоичном формате или по аналоговым выходам (по вторичным цепям 1 А или 5 А) по измерительному каналу от встроенного электромагнитного трансформатора тока, по релейному каналу в диапазоне 0 – 50 I_n , т.е. с кратностью до 50 от магнитотранзисторного преобразователя тока. При этом обеспечивается трансформация всего спектра частот тока короткого замыкания, включая апериодическую составляющую тока КЗ. Зарезервирован третий канал для выдачи информации о первичном напряжении потребителю в любом цифровом двоичном формате или по аналоговым выходам напряжения (по вторичным цепям 100 В) в диапазоне 0 – 1,2 U_n .

Цифровая информация о первичном токе выдается потребителю микропроцессором ЦТТ по мгновенным значениям 12-битным

(16-битным) двоичным кодом в темпе 128 отсчетов на период 50 Гц, т.е. 6400 отсчетов в секунду по каждому каналу.

Предусмотрена возможность оперативного изменения числа отсчетов на период в диапазоне от 12 до 1024 в соответствии со стандартом COMTRADE.

Кроме упомянутых выше каналов, ЦТТ имеет 4 цифровых канала встроенного тестового и режимного контроля, информация от которых может поступать на ПК релейщика (метролога), передаваться в диспетчерскую службу, в том числе и через ИНТЕРНЕТ. Такая структура ЦТТ принята в результате исследований достоинств и недостатков электромагнитных трансформаторов тока и общей тенденции перехода на цифровые интегрированные системы обработки информации на станциях и подстанциях энергосистем.

На основе теории дискретной реализации закона полного тока разработана методика проектирования магнитотранзисторного преобразователя тока исходя из точности и динамического диапазона по заданным геометрическим размерам токопровода.

Разработана методика поверки цифрового трансформатора тока на основании ГОСТ 7746-2001 на трансформаторы тока (аналоговые) с определением токовой, угловой и полной погрешностей ЦТТ при токах до 120 % номинального тока. Методика предусматривает обработку файлов любой длины мгновенных значений тока ЦТТ и образцового канала с шунта, при этом статистически достоверно определяются не только вышеуказанные параметры, но и частота в сети в момент опыта, действующие значения и фазы любого числа гармоник и т.д.

Разработана методика поверки цифрового трансформатора тока при трансформации токов короткого замыкания с апериодической составляющей. Определяются все указанные параметры, а также погрешность трансформации апериодической составляющей тока КЗ.

Блок питания цифрового трансформатора тока. Измерительная часть цифрового трансформатора тока содержит электронику на высоком потенциале, которая требует питания. С учетом высоких требований к своевременности подачи информации о токе обеспечение бесперебойного питания таких преобразователей является важной задачей. Решение этой задачи осложняется наличием высоковольтной изоляции. Частично это может быть решено с помощью дополнительного трансформатора тока, нагруженного на сопротивление, не требующего изоляции. Однако такое питание возможно осуществлять только при нали-

чии тока в первичной цепи. Использование дополнительных аккумуляторных батарей также имеет недостатки в связи с широким температурным диапазоном эксплуатации измерительных преобразователей и недолговечностью аккумуляторов.

Решение данной задачи предполагается осуществить с помощью электромагнитного преобразователя с разомкнутым магнитопроводом. Частичное отсутствие магнитопровода в данной конструкции делает неоптимальной магнитную систему для передачи энергии, однако позволяет применить монолитную изоляцию. С другой стороны, электроника, находящаяся на высоком потенциале, потребляет не более 10 Вт, таким образом, при подаче питания с земли мощностью 100 Вт достаточно, чтобы источник питания имел КПД 10 %. Предлагаемая конструкция представлена на рис. 2, на котором показаны: монолитная изоляция 9; расщепленный магнитопровод, состоящий из ферромагнитного сердечника 7 и ферромагнитного экрана 4; первичная обмотка 6, находящаяся на потенциале земли, запитанная переменным током; и вторичная обмотка 5, находящаяся на высоком потенциале, питающая электронику ЦТТ.

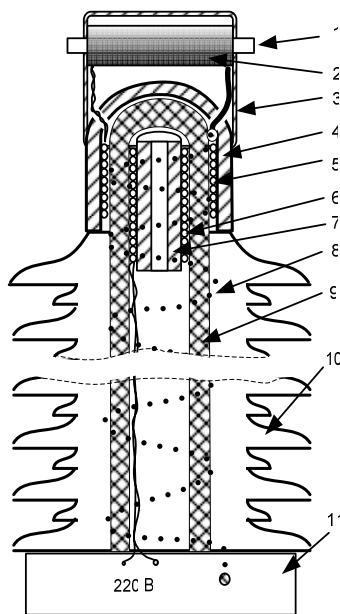


Рис. 2. Высоковольтный блок питания:
1 – токопровод, 2 – цифровой трансформатор тока, 3 – кожух, 4 – ферромагнитный экран, 5 – вторичная обмотка преобразователя, 6 – первичная обмотка, 7 – ферромагнитный сердечник, 8 – оптоволоконный информационный кабель, 9 – цельная внутренняя изоляция, 10 – наружная изоляция, 11 – основание изолятора с электроникой

Для указанной конструкции блока питания необходимо определить параметры изоляции 9 (рис. 2) на основании расчета электрического поля. Кроме того, требуется определить параметры обмоток и ферромагнитных сердечников.

Расчеты данной конструкции невозможно проводить на основе методов расчета магнитных цепей, так как здесь нельзя пренебрегать полями рассеяния. С другой стороны, данная конструкция не относится и к воздушному трансформатору. Следовательно, расчеты необходимо вести на основе полевого моделирования.

Полевой расчет произведем отдельно для электрического и магнитного полей. Расчет указанных полей произведем численно с использованием метода конечных элементов. Рассматриваемая конструкция обладает осевой симметрией, поэтому необходимым и достаточным является двумерное моделирование полей.

В качестве расчетного инструмента нами было использовано приложение PDETool программного комплекса системы Matlab. Однако PDETool предназначен для расчета плоскопараллельных полей, поэтому уравнения данного приложения были изменены под наши осесимметричные задачи.

Электрическое поле описывается уравнением Лапласа в цилиндрической системе координат:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad (1)$$

где r , θ и z – цилиндрические координаты. Используя осевую симметрию, уравнение (1) запишем в виде

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (2)$$

На рис. 3 изображено моделируемое пространство, где стрелочками показаны границы расчетной области. Граничные условия заданы исходя из приложенных напряжений, так потенциал на границах 1, 2, 3 (рис. 3) соответствует напряжению 110 кВ, на границах 5, 6, 7 потенциал равен нулю, а граничные условия 4 и 8 выбраны исходя из условий Неймана.

Результаты расчетов представлены на рис. 4 и 5. Как видно, напряженность электрического поля максимальна в углах внутренней части и может достигать 70 кВ/см. В целях уменьшения указанной напряженности следует избегать острых углов, а оптимальным является выполнение

внутренней верхней части изолятора в виде полусферы. Для дальнейшего снижения электрического поля можно применить многослойную изоляцию, внутренние слои которой выбираются с большей диэлектрической проницаемостью ϵ , чем наружные. Кроме того, электрическое поле можно существенно снизить путем введения электропроводных материалов между слоями изоляции.

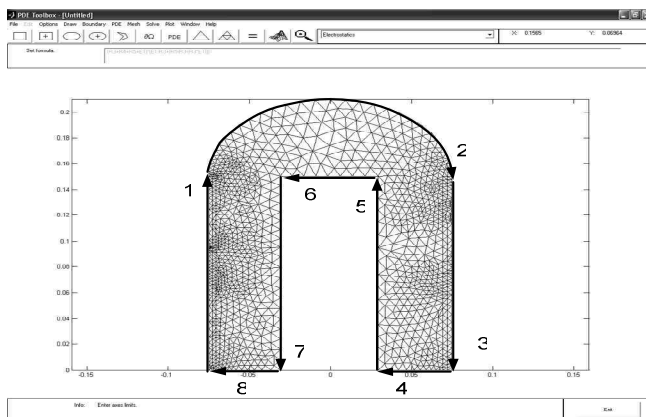


Рис. 3. Расчетная область

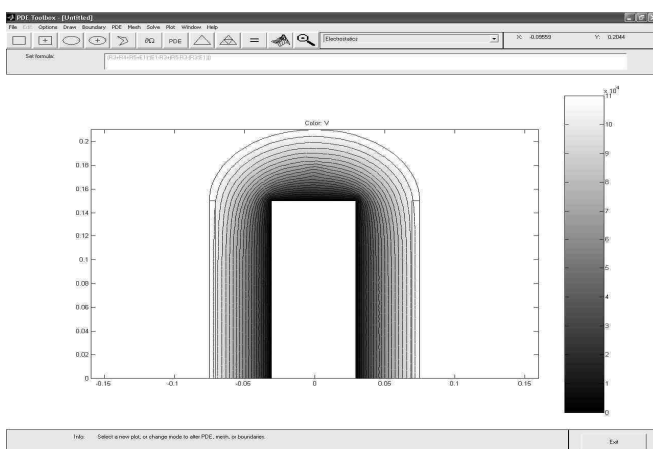


Рис. 4. Распределение потенциала

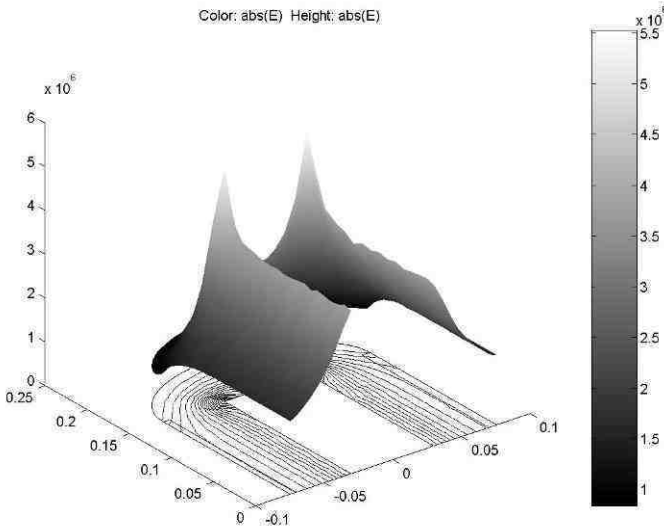


Рис. 5. Распределение напряженности электрического поля

Расчет магнитного поля осуществляется по векторному уравнению

$$\left\{ \nabla^2 A_r - \frac{1}{r^2} \left(A_r + 2 \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \right) \right\} 1_r + \left\{ \nabla^2 A_\theta - \frac{1}{r^2} \left(A_\theta - 2 \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \right\} 1_\theta + \nabla^2 A_z k = J. \quad (3)$$

Граничные условия выбираются исходя из условия нулевого векторного магнитного потенциала на значительном удалении от расчетной области. На основании расчета магнитных полей планируется определить взаимные индуктивности и параметры обмоток блока питания.

Библиографический список

1. **Гречухин В.Н.** Высоковольтный цифровой трансформатор тока // 7-й симпозиум «Электротехника, 2010 год»: Сб. тез. – Т. 2. – 2003. – С. 109–111.
2. **Программное** обеспечение высоковольтного цифрового трансформатора тока для энергосистем / В.Н. Гречухин, С.В. Ларионов, М.Г. Марков и др. // 7-й симпозиум «Электротехника, 2010 год»: Сб. тез. – Т. 2. – 2003. – С. 179–183.
3. **Гречухин В.Н.** Высоковольтный цифровой трансформатор тока // 7-й симпозиум «Электротехника, 2010 год»: Сб. тез. Т. 2. – 2003. – С. 37–38.

УДК 621.311

Специализация математических моделей сложных электроэнергетических систем применительно к исследованию устойчивости вторым методом Ляпунова

М.Ш. Мисриханов, д-р техн. наук, Ю.В. Морошкин, канд. техн. наук

Существует настоятельная необходимость при исследовании современных крупных энергообъединений использовать методы общей математической теории управления.

В настоящее время подобные исследования проводятся на основе расчетов переходных процессов в электроэнергетических системах [1]. Вывод об устойчивости или неустойчивости системы при этом производится в результате проведения некоторого конечного числа подобных расчетов, что с точки зрения общей математической теории устойчивости не является вполне корректным.

Тем не менее непосредственное применение методов теории устойчивости в случае математических моделей, используемых в настоящее время при расчетах переходных процессов, не представляется возможным. Необходимо произвести видоизменение моделей таким образом, чтобы для их исследования оказались применимыми методы общей теории устойчивости. Для этих целей, прежде всего, можно указать классические консервативные модели [2]. Однако подобные модели по своей структуре сильно отличаются от тех, которые применяются в расчетах переходных процессов в сложных электроэнергетических системах.

Обобщенная структура математических моделей при расчетах переходных процессов в достаточно общем виде приведена в [3]. Здесь рассматривается система уравнений следующего достаточно общего вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{Ji} \frac{d^2 x_i}{dt^2} = f_i(x, y, z, u, t) \quad (i = 1, \dots, n), \\ T_{d0j} \frac{dy_j}{dt} = \varphi_j(x, y, z, u, t) \quad (j = 1, \dots, m), \\ \gamma_j(x, y, z, u, t) = 0, \\ \psi_k(x, y, z, u, t) = 0 \quad (k = 1, \dots, r), \end{array} \right. \quad (1)$$
$$\quad \quad \quad (2)$$
$$\quad \quad \quad (3)$$
$$\quad \quad \quad (4)$$

где x, y, z, u – векторы переменных x_i ($i = 1, \dots, n$); y_j ($j = 1, \dots, m$); z_j ($j = 1, \dots, m$); u_k ($k = 1, \dots, r$); величины T_{ji}, T_{d0j} – положительные числа.

Переменные x – это угловые величины, характеризующие вращение роторов синхронных генераторов. Переменные y, z включают величины, описывающие переходные процессы в контурах ротора (ЭДС E_j и E'_j) части ($m < n$) или всех ($m = n$) генераторов, уравнения (2), (3) – это уравнения переходных процессов в роторных цепях. Процессы в электрических сетях характеризуются переменными u и уравнениями (4).

Аналитические формулы для выражений функций

$$f_i (i = 1, \dots, n); \varphi_j (j = 1, \dots, m); \gamma_j (j = 1, \dots, m); \psi_k (k = 1, \dots, r)$$

приведены в [4 – 7].

Характерной особенностью системы (1) – (4) является отсутствие в ней производных по времени от переменных z и u , т.е. величины $\dot{z} = \frac{dz}{dt}$ и

$\dot{u} = \frac{du}{dt}$ не присутствуют в явном виде в (1) – (4).

Предполагается, что система уравнений (3), (4) в окрестности некоторой заданной точки

$$\left(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}, u^{(0)} \right),$$

координаты которой удовлетворяют этой системе, разрешима относительно Z, U , т.е. имеют место функции

$$z = z(x, y, t); \quad u = u(x, y, t). \quad (5)$$

Подобное предположение позволяет расчет переходного процесса свести к использованию численных методов интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} T_{ji} \frac{d^2 x_i}{dt^2} = f_i [x, y, z(x, y, t), u(x, y, t), t] & (i = 1, \dots, n), \\ T_{d0j} \frac{dy_j}{dt} = \varphi_j [x, y, z(x, y, t), u(x, y, t), t] & (j = 1, \dots, m). \end{cases}$$

При этом на каждом шаге интегрирования осуществляется численное решение системы нелинейных уравнений (3), (4) относительно z, u , чтобы избежать получения в явном виде их выражений (5).

При условии, что переменные y, z не входят в систему (1) – (4) и переменными служат только x, u , система (1) – (4) переписывается в виде

$$\begin{cases} T_{ji} \frac{d^2 x_i}{dt^2} = f_i(x, u, t) & (i = 1, \dots, n), \\ \psi_k(x, u, t) & (k = 1, \dots, r), \end{cases} \quad (6)$$

при этом она включает дифференциальные уравнения второго порядка электромеханического движения роторов генераторов и уравнения $\psi_k = 0$ процессов в электрической сети.

Если соблюдено дополнительное условие автономности системы (6), (7), т.е. независимости функций f_i ($i = 1, \dots, n$), ψ_k ($k = 1, \dots, r$) от времени t , то система (6), (7) имеет вид

$$\begin{cases} T_{ji} \frac{d^2 x_i}{dt^2} = f_i(x, u) & (i = 1, \dots, n), \\ \psi_k(x, u), & (k = 1, \dots, r). \end{cases} \quad (8)$$

И аналогом равенств (5) будет следующее равенство:

$$u = u(x). \quad (10)$$

В результате система (8), (9) сводится лишь к дифференциальным уравнениям электромеханического движения роторов генераторов:

$$T_{ji} \frac{d^2 x_i}{dt^2} = f_i(x, u(x)) \quad (i = 1, \dots, n). \quad (11)$$

При известном упрощенном подходе получения выражения (10), в основе которого лежит предположение о возможности представления нагрузок постоянными импедансами, система уравнений (11) представляет собою классическую позиционную систему. Для ее интегрирования разработаны эффективные численные методы [4, 8], однако для позицион-

ных систем также отсутствуют способы использования методов математической теории устойчивости в случае электроэнергетических систем, состоящих более чем из двух генераторов ($n > 2$) [9].

Положение существенным образом изменяется, когда вместо позиционной системы (11) рассматривается классическая консервативная система [2]:

$$T_{ji} \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial V^{(1)}}{\partial x_i} \quad (i = 1, \dots, n), \quad (12)$$

где $V^{(1)} = V^{(1)}(x_1, \dots, x_n)$ – силовая функция, подбор аналитического выражения которой осуществляется таким образом, чтобы выражения частных производных $\frac{\partial V^{(1)}}{\partial x_i}$ были по возможности близкими в некотором смысле [7, 10] выражениям функций $f_i(x, u(x))$ при одинаковых i .

Необходимо отметить, что известные методы перехода от системы (11) к системе (12) являются приближенными. Чаще всего для этой цели используется предположение о чисто реактивном характере электрических связей в позиционной системе [7, 10]. В [11] предложено такое предположение использовать уже применительно к системе (8), (9) и лишь затем переходить к предположению о возможности представления нагрузок постоянными импедансами.

У консервативных систем (12), как известно, существует интеграл энергии

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n T_{ji} \dot{x}_i^2 - V^{(1)}(x_1, \dots, x_n) = C, \quad (13)$$

где C – константа, $\dot{x}_i = \frac{dx}{dy}$. Это возможно проверить непосредственно, вычисляя полную производную по времени t в силу уравнений системы (12) от левой части выражения (13):

$$\sum_{i=1}^n T_{ji} \dot{x}_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial V^{(1)}}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V^{(1)}}{\partial x_i} \dot{x}_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial V^{(1)}}{\partial x_i} \dot{x}_i \equiv 0.$$

Наличие интеграла энергии у системы (12) позволяет для исследования устойчивости стационарных решений подобрать функцию Ляпунова

[2, 7, 12]. Конкретный вид выражения функции Ляпунова зависит от характера вхождения переменных x в правые части уравнений (12) [12, 13].

При наличии в электроэнергетической системе шин бесконечной мощности стационарным режимам отвечают стационарные точки системы (12). Координаты стационарных точек

$$(x_{10}, \dots, x_{n0}) \quad (14)$$

удовлетворяют системе нелинейных уравнений

$$\frac{\partial V^{(1)}}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n),$$

а их производные \dot{x}_i всегда равны нулю: $\dot{x}_i = 0$ ($i = 1, \dots, n$).

Исследование устойчивости стационарных точек по отношению к переменным x_i, \dot{x}_i ($i = 1, \dots, n$) может производиться [14] с использованием в качестве функции Ляпунова функции

$$W^{(1)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n T_{ji} \dot{x}_i^2 - V^{(1)}(x_1, \dots, x_n) + V^{(1)}(x_{10}, \dots, x_{n0}), \quad (15)$$

где $V^{(1)}(x_{10}, \dots, x_{n0})$ – значение силовой функции $V^{(1)}$ в стационарной точке (14). Стационарная точка (14) будет устойчивой, если в ней силовая функция $V^{(1)}$ имеет максимум.

Следует отметить, что при отсутствии шин бесконечной мощности выбор переменных, по отношению к которым должно вестись исследование устойчивости, оказывается существенно отличным от указанного выше [15]. Выражение функции Ляпунова также будет другим, не совпадающим с (15). Далее будет всегда предполагаться выполненным допущение о наличии в электроэнергетической системе шин бесконечной мощности.

Возможен другой способ построения консервативных моделей электроэнергетических систем, отличный от классического. В [16] установлено, что в случае системы (8), (9) вместо традиционного допущения о представлении нагрузок постоянными импедансами можно предполагать постоянство активных узловых мощностей и изменение реактивной мощности в соответствии с произвольными статическими характеристиками от напряжения. Тогда система (8), (9) при условии чисто реактивных связей между узлами схем записывается в виде

$$\begin{cases} T_{Ji} \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial V^{(2)}}{\partial x_i} & (i = 1, \dots, n), \\ \frac{\partial V^{(2)}}{\partial u_k} = 0 & (k = 1, \dots, r), \end{cases} \quad (16)$$

где $V^{(2)} = V^{(2)}(x, u) = V^{(2)}(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r)$ – силовая функция, выражение которой известно [16].

Согласно [16] у системы (16) имеется интеграл

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n T_{Ji} \dot{x}_i^2 - V^{(2)}(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r) = C, \quad (17)$$

где C – постоянная.

Убедимся в этом посредством определения полной производной от левой части (17).

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n T_{Ji} \dot{x}_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial V^{(2)}}{\partial x_i} \dot{x}_i - \sum_{k=1}^r \frac{\partial V^{(2)}}{\partial u_k} \dot{u}_k &= \\ = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V^{(2)}}{\partial x_i} \dot{x}_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial V^{(2)}}{\partial x_i} \dot{x}_i - 0 &= 0, \end{aligned}$$

откуда следует наличие интеграла (17) у системы (16).

Для исследования устойчивости стационарных точек

$$(x_{10}, \dots, x_{n0}, u_{10}, \dots, u_{r0}) \quad (18)$$

системы (16), координаты которых удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\partial V^{(2)}}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n); \quad \frac{\partial V^{(2)}}{\partial u_k} = 0 \quad (k = 1, \dots, r),$$

по переменным $x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r$ в качестве функции Ляпунова возможно использовать функцию

$$W^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n T_{Ji} \dot{x}_i^2 - V^{(2)}(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r) + V^2(x_{10}, \dots, x_{n0}, u_{10}, \dots, u_{r0}).$$

Устойчивость стационарной точки (18) будет иметь место при наличии максимума функции $V^{(2)}$ в точке (18).

Теперь откажемся от ранее сделанного предположения о невхождении переменных u и z в исходную систему уравнений (1) – (4) и рассмотрим автономный случай, когда выражения функций $f_i, \varphi_j, \gamma_j, \psi_k$ не зависят явным образом от t . Кроме того, следуя [6], левые и правые части уравнений (2) разделим на разности $x_{dj} - x'_{di}$ сопротивлений в продольных осях роторов генераторов, в результате имеем систему уравнений

$$\begin{cases} T_{ji} \frac{d^2 x_i}{dt^2} = f_i(x, y, z, u) & (i = 1, \dots, n), \\ \frac{T_{d0j}}{x_{dj} - x'_{di}} \frac{dy_j}{dt} = \tilde{\varphi}_j(x, y, z, u) & (j = 1, \dots, m), \\ \gamma_j(x, y, z, u) = 0, \\ \psi_k(x, y, z, u) = 0 & (k = 1, \dots, r), \end{cases} \quad (19)$$

где использовано обозначение

$$\tilde{\varphi}_j = \frac{1}{x_{dj} - x'_{di}} \cdot \varphi_j(x, y, z, u).$$

По аналогии с предыдущим предполагаем разрешимость последних r уравнений относительно u :

$$u = u(x, y, z). \quad (20)$$

В результате система (19) переписывается в виде

$$\begin{cases} T_i^{(1)} \frac{d^2 x_i}{dt^2} = f_i[x, y, z, u(x, y, z)] & (i = 1, \dots, n), \\ \frac{T_{d0j}}{x_{dj} - x'_{di}} \frac{dy_j}{dt} = \tilde{\varphi}_j[x, y, z, u(x, y, z)] & (j = 1, \dots, m), \\ \gamma_j[x, y, z, u(x, y, z)] = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Трудности, связанные с получением в явном виде формул (20), практически преодолеваются по аналогии с теорией классических пози-

ционных систем посредством упрощенного подхода к получению системы (21) на основе предположения о представлении нагрузок постоянными импедансами.

В [6] показано, что в результате использования приемов, аналогичных тем, которые применяются при приближенной замене классической позиционной системы консервативной [2, 7, 17], система (21) может быть приближенно представлена в виде

$$\begin{cases} T_{Ji} \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial V^{(3)}}{\partial x_i} & (i = 1, \dots, n), \\ \frac{T_{d0j}}{x_{di} - x'_{di}} \frac{dy_j}{dt} = \frac{\partial V^{(3)}}{\partial y_j} & (j = 1, \dots, m), \\ \frac{\partial V^{(3)}}{\partial z_j} = 0, \end{cases} \quad (22)$$

где функция $V^{(3)} = V^{(3)}(x, y, z)$ задается известным аналитическим выражением.

Нетрудно видеть, что полная производная по времени t от функции

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n T_{Ji} \dot{x}_i^2 - V^{(3)}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_m)$$

в силу уравнений (22) оказывается неотрицательной. Действительно, эта производная равна

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n T_{Ji} \dot{x}_i \ddot{x}_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial V^{(3)}}{\partial x_i} \dot{x}_i - \sum_{j=1}^m \frac{\partial V^{(3)}}{\partial y_j} \dot{y}_j - \sum_{j=1}^m \frac{\partial V^{(3)}}{\partial z_j} \dot{z}_j = \\ & = \sum_{i=1}^n \dot{x}_i \frac{\partial V^{(3)}}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial V^{(3)}}{\partial x_i} \dot{x}_i - \sum_{j=1}^m \frac{T_{d0j}}{x_j - x'_j} \dot{y}_j^2 = - \sum_{j=1}^m \frac{T_{d0j}}{x_j - x'_j} \dot{y}_j^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Для исследования на устойчивость по переменным

$$x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_m \quad (23)$$

стационарных точек

$$(x_{10}, \dots, x_{n0}, y_{10}, \dots, y_{m0}, z_{10}, \dots, z_{m0}) \quad (24)$$

системы уравнений (22), координаты которых удовлетворяют системе нелинейных уравнений

$$\frac{\partial V^{(3)}}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n); \quad \frac{\partial V^{(3)}}{\partial y_j} = 0; \quad \frac{\partial V^{(3)}}{\partial z_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, m),$$

в качестве функции Ляпунова воспользуемся функцией

$$W^{(3)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n T_{Ji} \dot{x}_i^2 - V^{(3)}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_m) + V_0^{(3)},$$

где через $V_0^{(3)}$ обозначено значение функции $V^{(3)}$ в точке (24). Если в точке (24) $V^{(3)}$ имеет максимальное значение, то стационарная точка будет устойчивой по переменным (23).

Получение системы (22) базировалось на предположении о возможности представления нагрузок постоянными импедансами с последующим пренебрежением активными составляющими сопротивлений ветвей эквивалентной схемы. Можно, наоборот, вначале использовать допущение о чисто реактивном характере связей исходной системы и в дополнение к этому допускать представление нагрузок постоянными импедансами [11].

Вполне возможно также в соответствии с [16] вместо представления нагрузок постоянными импедансами воспользоваться их приближенным представлением статическими характеристиками, когда активная мощность считается постоянной, а реактивная изменяется в соответствии с заданной функцией напряжения.

Тогда не требуется производить исключение переменных u_1, \dots, u_r в (19), и осуществляется подбор функции в $V^{(4)}$ с использованием приемов [2, 7, 17], в результате чего система (19) приближенно заменяется системой

$$\begin{cases} T_{Ji} \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial V^{(4)}}{\partial x_i} & (i = 1, \dots, n), \\ \frac{T_{d0j}}{x_{di} - x'_{di}} \frac{dy_j}{dt} = \frac{\partial V^{(4)}}{\partial y_j} & (j = 1, \dots, m), \\ \frac{\partial V^{(4)}}{\partial z_j} = 0, \\ \frac{\partial V^{(4)}}{\partial u_k} = 0 & (k = 1, \dots, r), \end{cases} \quad (25)$$

число уравнений которой такое же, как и в (19). Выражение функции $V^{(4)}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_m, u_1, \dots, u_r)$ предполагается известным.

Стационарные точки системы (25) удовлетворяют нелинейным уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial V^{(4)}}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n); \quad \frac{\partial V_3^{(4)}}{\partial y_j} = 0; \\ \frac{\partial V_3^{(4)}}{\partial z_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, m); \quad \frac{\partial V_3^{(4)}}{\partial u_k} = 0 \quad (k = 1, \dots, r). \end{aligned}$$

Для исследования устойчивости стационарной точки с координатами

$$(x_{10}, \dots, x_{n0}, y_{10}, \dots, y_{m0}, z_{10}, \dots, z_{m0}, u_{10}, \dots, u_{r0}) \quad (26)$$

в качестве функции Ляпунова принимается функция

$$W^{(4)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n T_{Ji} \dot{x}_i^2 - V^{(4)}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_m, u_1, \dots, u_r) + V_0^{(4)},$$

где через $V_0^{(4)}$ обозначено значение функции $V^{(4)}$ в точке (26).

Устойчивость по переменным x, y, z, u стационарной точки (26) будет иметь место, если в этой точке функция $V^{(4)}$ имеет максимум. Это подтверждается тем, что полная производная по времени t от функции $W^{(4)}$ в силу уравнений (25) оказывается неположительной:

$$\begin{aligned} \frac{dW^{(4)}}{dt} = \sum_{i=1}^n T_{Ji} \dot{x}_i \ddot{x}_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial V^{(4)}}{\partial x_i} \dot{x}_i - \sum_{j=1}^m \frac{\partial V^{(4)}}{\partial y_j} \dot{y}_j \\ - \sum_{j=1}^m \frac{\partial V^{(4)}}{\partial z_j} \dot{z}_j - \sum_{k=1}^r \frac{\partial V^{(4)}}{\partial u_k} \dot{u}_k = - \sum_{j=1}^m \frac{T_{d0j}}{x_{di} - x'_{di}} (\dot{y}_j)^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Ранее исходная система приближенно представлялась в виде, при котором функции правых частей дифференциальных уравнений и левых частей нелинейных уравнений заменялись на частные производные некоторой функции V . При этом предполагалось, что установившимся режимам исходной системы соответствуют критические точки функции V .

В [17] предложен способ получения функции V таким образом, чтобы одна из ее устойчивых стационарных точек совпадала с устойчивым установившимся режимом исходной системы. В целом же подбор функции V осуществляется так, чтобы при замене функции $f_i(x, y, z, u)$, $\tilde{\varphi}_i(x, y, z, u)$, $\gamma_j(x, y, z, u)$, $\psi_k(x, y, z, u)$ частными произ-

водными $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$, $\frac{\partial V}{\partial u}$ разности

$$f_i - \frac{\partial V}{\partial x_i}; \quad \tilde{\varphi}_j - \frac{\partial V}{\partial y_j}; \quad \gamma_j - \frac{\partial V}{\partial z_j}; \quad \psi_k - \frac{\partial V}{\partial u_k}$$

стремились к нулю при стремлении к нулю параметров, которыми оценивается величина активных составляющих в электрических цепях.

В заключение следует еще раз отметить, что исследование устойчивости ограничилось исключительно математическими моделями электроэнергетических систем при наличии в них шин бесконечной мощности. В системах конечной мощности требуются совершенно иные подходы к исследованию устойчивости, включая и выбор переменных, по которым ведется исследование устойчивости [15].

Библиографический список

1. **Методические** указания по определению устойчивости энергосистем. – М.: Союзтехэнерго, 1979. – Ч. 1. – 184 с.
2. **Горев А.А.** Избранные труды по вопросам устойчивости электрических систем. – М.: Госэнергоиздат, 1960. – 260 с.
3. **Мисриханов М.Ш., Морошкин Ю.В.** Выделение элементарных составляющих задач в алгоритмах расчета переходных электромеханических процессов // Вестник ИГЭУ. – 2003. – Вып. 4.
4. **Веников В.А.** Переходные электромеханические процессы в электрических системах. – М.: Высш. шк., 1985. – 536 с.
5. **Лоханин Е.К., Васильева Г.В.** Применение методов численного анализа к исследованию уравнений переходных процессов в сложных энергетических системах // Тр. ВНИИЭ. – М.: Энергия, 1968. – Вып. 33. – С. 19–39.
6. **Морошкин Ю.В., Чергова Г.И.** Методы исследования одной математической модели сложных энергосистем с учетом процессов в обмотках возбуждения генераторов // Тр. института Энергосетьпроект. – М.: Энергоиздат, 1981. – Вып. 22. – С. 96–105.
7. **Морошкин Ю.В.** Функции Ляпунова для математических моделей электрических систем при учете нагрузок статическими характеристиками и учете переходных процессов в контурах ротора // Электричество. – 1977. – №10. – С. 13–19.
8. **Морошкин Ю.В.** О методе последовательных интервалов // Изв. вузов. Энергетика. – 1971. – №6. – С. 23–26.
9. **Путилова А.Т., Тагиров М.А.** Критерии устойчивости электроэнергетических систем // Итоги науки и техники. Электрические станции, сети и системы. – М.: ВИНТИ, 1971. – 63 с.

10. **Андреюк В.А., Сказываева И.С.** Методы построения консервативной модели энергосистемы для анализа режимов и устойчивости // Изв. РАН. Энергетика. – 1997. – №5. – С. 107–110.
11. **Расчеты** квазиустановившихся режимов электрических систем и анализ их устойчивости // Л.А. Жуков, А.Н. Цовьянов, Ю.В. Морошкин, А.Ю. Поздняков // Тез. докл. Всесоюз. науч. конф. «Современные проблемы энергетики и электротехники». Направление «Современные проблемы энергетики». – М.: МЭИ, 1977. – С. 192.
12. **Путилова А.Т.** Функция Ляпунова для уравнения взаимного движения синхронных машин и ее модификации // Тр. СибНИИЭ. – Новосибирск, 1970. – Вып. 19. – С. 104–114.
13. **Морошкин Ю.В.** К исследованию статической устойчивости сложных электрических систем // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1972. – №6. – С. 44–50.
14. **Барбашин Е.А.** Функции Ляпунова. – М.: Наука, 1970. – 240 с.
15. **Морошкин Ю.В.** Функции Ляпунова при учете действия регуляторов скорости в сложных энергосистемах // Тр. института «Энергосетьпроект». Проблемы устойчивости энергосистем. – М.: Энергоиздат, 1981. – Вып. 22. – С. 110–114.
16. **Васин В.П.** Интегралы энергии для уравнений переходных процессов электроэнергетической системы при учете нагрузок статическими характеристиками // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1974. – №6. – С. 26–35.
17. **Морошкин Ю.В.** Методы малого параметра применительно к построению позиционных и консервативных моделей электрических систем. Применение метода функций Ляпунова в энергетике. – Новосибирск: Наука. Сибирское отделение, 1975. – С. 96–99.

УДК 621.311.016.35

Методика численного определения и оценки областей синхронной динамической устойчивости сложных электроэнергетических систем в консервативной идеализации

М.Ш. Мисриханов, д-р техн. наук, Ю.В. Морошкин, канд. техн. наук

Введение. Применительно к исследованию синхронной динамической устойчивости электроэнергетических систем (ЭЭС) методы общей математической теории устойчивости [1] в наибольшей степени реализуемы на базе второго метода Ляпунова в случае консервативных математических моделей [2 – 5] переходных процессов. При этом основные методические трудности использования функций Ляпунова связаны с определением и анализом их седловых точек, число которых оказывается достаточно большим. Задача их отыскания и выбора одной единственной, подходящей для целей исследования устойчивости, с теоретической и практической точек зрения еще очень далека от окончательного решения.

Известные способы поиска седловых точек достаточно трудоемки, они включают методы многомерной оптимизации [2, 3] и введения дополнительного параметра [4] с последующим численным интегрированием специального вида систем дифференциальных уравнений. Рассматривается способ нахождения седловых точек посредством численного решения системы уравнений установившегося режима при задании начальных приближений, с учетом специфики аналитического выражения потенциальной составляющей функции Ляпунова математических моделей электрических систем. Практическую реализацию подобного подхода возможно осуществить на основе программного обеспечения для расчетов установившихся режимов.

Математическая модель ЭЭС. Приведем необходимые для дальнейшего рассмотрения сведения из теории консервативных электрических систем. Систему уравнений переходных процессов при условии отсутствия шин неизменного напряжения и ряда других хорошо известных допущений можно записать в виде

$$T_{ji} \ddot{\delta}_i = F_i(\delta_i - \delta_1, \dots, \delta_i - \delta_n) \quad (i = 1, \dots, n), \quad (1)$$

где функции F_i имеют выражения

$$F_i = P_i - E_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n E_j Y_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j). \quad (2)$$

Здесь использованы обозначения: T_{ji} – постоянные инерции генераторов; E_i – модули ЭДС генераторов; δ_i – фазовые углы ЭДС, являющиеся переменными в системе (1), их число совпадает с числом уравнений в (1). Точки над δ_i обозначают операцию дифференцирования. Остальные параметры в (1), (2), включая P_i , B_{ik} , считаются заданными постоянными.

Постоянные P_i , B_{ik} определяются в процессе приближенной замены системы уравнений переходных процессов электрических систем в позиционной идеализации

$$T_{ji} \ddot{\delta}_i = P_{Ti} - E_i^2 Y_{ii} \sin \alpha_{ii} - E_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n E_j Y_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (3)$$

консервативной системой (1). Обозначения в (3) общепринятые: P_{Ti} – мощность турбины; Y_{ij} – модули взаимных проводимостей между узлами

i и j схемы замещения; δ_i, δ_j – дополнительные до $\pi/2$ углы матрицы эквивалентных проводимостей; Y_{ii} и α_{ii} – модули и дополнительные углы собственных проводимостей. Все эти параметры предполагаются постоянными, их численные значения определяются посредством хорошо известных методов эквивалентирования на основе информации об исходной схеме замещения электрической системы и результатов расчета исследуемого установившегося режима, который предполагается устойчивым. Этому установившемуся режиму отвечает специального вида [6] решение системы (3)

$$\delta_i' = \delta_{i0} + (a/2)t^2 + \omega t, \quad (4)$$

где a, ω, δ_{i0} ($i = 1, \dots, n$) – постоянные величины. Исследование устойчивости производится по относительным углам

$$\delta_{ik} = \delta_i - \delta_k \quad (i, k = 1, \dots, n; i \neq k) \quad (5)$$

и производным $\dot{\delta}_i$ или $\ddot{\delta}_{ik}$ [6, 7].

Приближенная замена позиционной системы (3) консервативной (1) осуществляется из условия, при котором бы последняя в качестве устойчивого установившегося режима имела тот же самый режим (4) и в окрестности этого общего режима значения правых частей (1) и (3) были по возможности близкими. В соответствии с [6] выражения для параметров P_i и B_{ik} консервативной системы через параметры позиционной системы и ее устойчивого установившегося режима имеют вид

$$P_i = P_{Ti} - E_i^2 Y_{ii} \sin \alpha_{ii} - E_i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n E_k G_{ik} \cos(\delta_{i0} - \delta_{k0}); \quad (6)$$

$$B_{ik} = Y_{ik} \cos \alpha_{ik} \quad (i, k = 1, \dots, n; i \neq k); \quad (7)$$

$$G_{ik} = -Y_{ik} \sin \alpha_{ik} \quad (i, k = 1, \dots, n; i \neq k). \quad (8)$$

Консервативные системы (1), (2), (6) – (8) обладают рядом свойств [7], из которых рассмотрим два.

- Во-первых, постоянная a из (4) удовлетворяет соотношению

$$a \sum_{i=1}^n T_{Ji} = \sum_{i=1}^n P_i. \quad (9)$$

Отметим, что равенство (9) имеет место в установившемся режиме исходной позиционной системы (3).

• Во-вторых, консервативная система обладает интегралом энергии, на основе которого строится подходящая функция Ляпунова при исследовании динамической устойчивости.

Рассмотрим лишь потенциальную составляющую функции Ляпунова; взятая с обратным знаком она называется силовой функцией [7]. Стационарные точки силовой функции, кроме точек максимума, определяют седловые точки функции Ляпунова консервативных систем. Они находят применение при оценке области синхронной динамической устойчивости сложных электрических систем [2 – 4].

Выражение силовой функции для (1), (2) может быть дано в виде [7]

$$\begin{aligned}
 V(\delta_{12}, \dots, \delta_{1n}) = & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n P_j (\delta_{1i} - \delta_{1j}) + a \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n T_{Jj} (\delta_{1j} - \delta_{1i}) + \\
 & + \sum_{i=1}^{n-1} E_i \sum_{k>i}^n E_k B_{ik} \cos(\delta_{1k} - \delta_{1i}),
 \end{aligned} \tag{10}$$

где относительные углы (5) представляются через $n - 1$ независимых:

$$\delta_{12} = \delta_1 - \delta_2, \delta_{13} = \delta_1 - \delta_3, \dots, \delta_{1n} = \delta_1 - \delta_n. \tag{11}$$

Методика определения стационарных точек силовой функции.

Переходим непосредственно к указанию способа определения некоторого множества стационарных точек функции (10). Для этого ее выражение преобразуем следующим образом. К сумме первых двух слагаемых правой части (10) добавим равную нулю разность

$$(P_i - aT_{Ji})\delta_{1i} - (P_i - aT_{Ji})\delta_{1i},$$

после чего в силу (9) сумма первых двух слагаемых в правой части (10) преобразуется к виду

$$- \sum_{j=2}^n (-aT_{Jj} + P_j)\delta_{1j},$$

поскольку $\delta_{11} = 0$.

Так как $\delta_{1i} = 0$ при $i = 1$, то третье слагаемое в правой части (10) приводится к виду

$$E_1 \sum_{k=2}^n E_k B_{1k} \cos \delta_{1k} + \sum_{i=2}^{n-1} E_i \sum_{k>i}^n E_k B_{ik} \cos(\delta_{1k} - \delta_{1i}).$$

В результате выражение для силовой функции окончательно представим в виде

$$V(\delta_{12}, \dots, \delta_{1n}) = - \sum_{j=2}^n (-aT_{j1} + P_j) \delta_{1j} + E_1 \sum_{k=2}^n E_k B_{1k} \cos \delta_{1k} + \sum_{i=2}^{n-1} E_i \sum_{k>i}^n E_k B_{ik} \cos(\delta_{1k} - \delta_{1i}). \quad (12)$$

Стационарные точки силовой функции удовлетворяют системе из $n - 1$ уравнений

$$(\partial V / \partial \delta_{1i}) = 0 \quad (i = 2, 3, \dots, n) \quad (13)$$

относительно такого же числа неизвестных (11). Что касается характера экстремума, то он определяется на основе матрицы Гесса

$$\left[\frac{\partial^2 V}{\partial \delta_{1i} \partial \delta_{1k}} \right] \quad (14)$$

с использованием критерия Сильвестра [1].

Отметим, что установившемуся режиму (4) соответствует решение

$$\delta_{12} = \delta_{10} - \delta_{20} = \delta_{12}^{(0)}, \dots, \delta_{1n} = \delta_{10} - \delta_{n0} = \delta_{1n}^{(0)} \quad (15)$$

системы уравнений (13), которое устойчиво по критерию Сильвестра: в точке (15) силовая функция (12) имеет изолированный максимум.

Другие стационарные точки также удовлетворяют системе (13), но использование известных итерационных методов для их отыскания вызывает трудности подбора необходимых начальных приближений.

Для преодоления этих трудностей предложено осуществлять исследование характера изменения силовой функции (12) вдоль отдельных

прямых в пространстве относительных углов δ_{i_1} , проходящих через точку (15). Уравнения таких прямых имеют вид

$$\delta_{12} = \mu_2 q + \delta_{12}^{(0)}, \dots, \delta_{1n} = \mu_n q + \delta_{1n}^{(0)}, \quad (16)$$

где q – параметр (любое действительное число), а коэффициенты μ_i ($i = 2, \dots, n$) задают направления прямых. Рассматриваемая вдоль такой прямой функция (12) оказывается функцией одного переменного q , которую будем обозначать $W(q)$. Очевидно, что при $q = 0$ функция $W(q)$ достигает максимального значения.

Коэффициенты μ_i выбираются таким образом, чтобы функция $W(q)$ имела аналитическое выражение, совпадающее с выражением силовой функции простейшей энергосистемы [8, 9], когда система (1) включает лишь одно уравнение и полагается наличие шин неизменного напряжения. Для этого достаточно условиться, что каждое из μ_i может принимать только одно из двух значений: $\mu_i = 0$ или $\mu_i = 1$. При таком способе выбора значений μ_i общее число рассматриваемых прямых (16) оказывается равным $2^{n-1} - 1$, поскольку одновременное обращение в нуль всех μ_i никакой прямой не соответствует.

Как будет показано далее, на каждой из указанных прямых силовая функция может быть приведена к виду

$$W(q) = qA^{(m)} + B^{(m)} \cos(q - \alpha^{(m)}) + R^{(m)}, \quad (17)$$

где

$$A^{(m)}, B^{(m)} > 0, R^{(m)}, \alpha^{(m)} - \quad (18)$$

некоторые постоянные величины, значения которых зависят от номера m выбранной прямой ($m = 1, 2, \dots, 2^{n-1} - 1$). Кроме того, надо иметь в виду, что, поскольку функция $W(q)$ при $q = 0$ должна достигать максимума, параметры (18) не могут быть независимыми между собой. Для выявления зависимости между ними приравняем к нулю выражение производной по q от (17), положив в нем $q = 0$, в результате чего получим искомое соотношение между параметрами (18):

$$A^{(m)} + B^{(m)} \sin \alpha^{(m)} = 0. \quad (19)$$

Таким образом, рассмотрению подлежат $2^{n-1} - 1$ функций вида (17), относительно параметров (18) которых справедливо соотношение (19).

Функции (17) на интервале $(-\pi, +\pi)$ при выполнении равенства (19) и дополнительном условии совпадения знаков числовых значений параметров $A^{(m)}$ и $B^{(m)}$ имеют две стационарные точки [8, 9]:

$$q_y^{(m)} = 0; \quad q_H^{(m)} = \pi + 2\alpha^{(m)}, \quad (20)$$

а при разных знаках $A^{(m)}$, $B^{(m)}$ имеют место стационарные точки

$$q_y^{(m)} = 0; \quad q_H^{(m)} = -\pi + 2\alpha^{(m)}, \quad (21)$$

причем в начале координат, как неоднократно отмечалось выше, достигается максимум функции (17), что, впрочем, легко устанавливается и по знаку второй производной $W(q)$ при $q = 0$. Точки q_n в (20), (21) – точки минимума (17).

Следует отметить, что при одинаковых знаках величин $A^{(m)}$, $B^{(m)}$ параметр $\alpha^{(m)}$ в силу (19) оказывается отрицательным, а в случае различных знаков указанных величин $\alpha^{(m)}$ будет положительным. В результате расстояние между точками $q_y^{(m)}$, $q_n^{(m)}$ всегда будет меньше π .

В пространстве взаимных углов (11) точкам минимума (20), (21) функции (17) при различных m в силу (16) отвечают точки с координатами

$$\delta_{12}^{(0)} + \mu_2^{(m)} q_H^{(m)}, \delta_{13}^{(0)} + \mu_3^{(m)} q_H^{(m)}, \dots, \delta_{1n}^{(0)} + \mu_n^{(m)} q_H^{(m)}, \quad (22)$$

где параметры $\mu_i^{(m)}$ принимают значения 0 или 1 в зависимости от номера m прямой вида (16). Точки (22) предлагается использовать в качестве начальных приближений при отыскании стационарных точек функции (12) посредством решения системы уравнений (13).

Покажем теперь, как с использованием уравнения прямых (16) силовая функция (12) преобразуется к виду (17). Сделаем соответствующие выкладки для случая, когда все μ_i равны единице:

$$\mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_n = 1. \quad (23)$$

Тогда из (16) при условии (23) функция (12) принимает вид

$$W(q) = q \sum_{j=2}^n (aT_{jj} - P_j) + E_1 \sum_{k=2}^n E_k B_{1k} \cos\left(q + \delta_{1k}^{(0)}\right) + R, \quad (24)$$

где R – постоянная, определяемая через параметры установившегося режима по формуле

$$R = \sum_{j=2}^n (aT_{j1} - P_j) \delta_{1j}^{(0)} + \sum_{i=2}^{n-1} E_i \sum_{k>2}^n E_k B_{1k} \cos(\delta_{1k}^{(0)} - \delta_{1i}^{(0)}). \quad (25)$$

Второе слагаемое в правой части (24) по аналогии с [9, 10] можно преобразовать к виду $E_1 D \cos(q - \alpha)$, где использованы обозначения

$$D = \sqrt{M^2 + N^2}; \quad \alpha = -\arctg(N/M),$$

$$M = \sum_{k=2}^n E_k B_{1k} \cos \delta_{1k}^{(0)}; \quad N = \sum_{k=2}^n E_k B_{1k} \sin \delta_{1k}^{(0)}. \quad (26)$$

В результате выражение (24) принимает вид

$$W(q) = q \sum_{j=2}^n (aT_{j1} - P_j) + E_1 D \cos(q - \alpha) + R. \quad (27)$$

Если обратиться к обозначениям, использованным в (17), а условиям (22), (23) присвоить номер 1, то в силу (9) и (27) имеем

$$A^{(1)} = \sum_{j=2}^n (aT_{j1} - P_j) = P_1 - aT_{j1}; \quad B^{(1)} = E_1 D,$$

$$\alpha^{(1)} = -\arctg(N/M).$$

Выполнение равенства (19) при $m = 1$ следует из (28) и первого уравнения системы

$$T_{ji} a = P_i - E_i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n E_k B_{ik} \sin(\delta_i - \delta_k) \quad (i = 1, \dots, n), \quad (29)$$

которая представляет собой систему уравнений установившегося режима для консервативных и позиционных систем [6, 7]; ей удовлетворяет решение вида (4), т.е. система (29) разрешима. В качестве неизвестных в (29) выступают относительные углы (11) и a .

Рассмотрим еще $n - 1$ прямых (16), когда все коэффициенты μ_i , кроме одного, оказываются равными нулю:

$$\mu_i = 0 \quad (i = 2, 3, \dots, n; i \neq r); \quad \mu_r = 1 \quad (r = 2, \dots, n).$$

Уравнения таких прямых имеют вид

$$\delta_{12} = \delta_{12}^{(0)}, \dots, \delta_{1r} = q + \delta_{1r}^{(0)}, \dots, \delta_{1n} = \delta_{1n}^{(0)}. \quad (30)$$

Эти прямые следует пронумеровать в соответствии со значениями индекса r , тогда указанные прямые имеют номера от 2 до n .

Для удобства подстановки (30) в силовую функцию (12) целесообразно третье слагаемое последней представить в виде

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{n-1} E_i \sum_{k>i}^n E_k B_{ik} \cos(\delta_{1k} - \delta_{1i}) &= E_r \sum_{i=2, i \neq r}^n E_i B_{ri} \cos(\delta_{1i} - \delta_{1r}) + \\ &+ \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq r}}^{n-1} E_i \sum_{\substack{k>i \\ i \neq r}}^n E_k B_{ik} \cos(\delta_{1k} - \delta_{1i}). \end{aligned} \quad (31)$$

Смысл проведенных преобразований – отделение членов суммы, включающих индекс r , от остальных. При проведении соответствующих выкладок учитывалось равенство $B_{ir} = B_{ri}$, следующее из (7).

В силу (31) подстановка (30) в (12) приводит к функции $W_r(q)$ вида (17), где по аналогии с (25) – (28) применяются следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A^{(r)} &= P_r - aT_{jr}; \quad B^{(r)} = E_r D_r; \quad \alpha^{(r)} = -\arctg(N_r/M_r); \\ R^{(r)} &= \sum_{j=2}^n (aT_{jj} - P_j) \delta_{1j}^{(0)} + E_1 \sum_{k=2, k \neq r}^n E_k B_{1k} \cos \delta_{1k}^{(0)} + \\ &+ \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq r}}^{n-1} E_i \sum_{\substack{k>i \\ k \neq r}}^n E_k B_{ik} \cos(\delta_{1k}^{(0)} - \delta_{1i}^{(0)}); \quad D_r = \sqrt{M_r^2 + N_r^2}; \\ M_r &= E_1 B_{1r} \cos \delta_{1r}^{(0)} + \sum_{r=2, i \neq r}^n E_i B_{ri} \cos(\delta_{1r}^{(0)} - \delta_{1i}^{(0)}); \\ N_r &= E_1 B_{1r} \sin \delta_{1r}^{(0)} + \sum_{r=2, i \neq r}^n E_i B_{ri} \sin(\delta_{1r}^{(0)} - \delta_{1i}^{(0)}). \end{aligned} \quad (32)$$

Функция $W_r(q)$, если выполняется условие $|A^{(r)}| \leq B^{(r)}$, имеет минимум. Этой точке минимума на прямой (30) отвечает точка, которая может использоваться в качестве начального приближения при отыскании очередной стационарной точки силовой функции (12).

Получение выражений для функции (17) с учетом (16) при двух и более отличных от нуля коэффициентах μ_i (они равны единице) осуществляется посредством дальнейших преобразований второго слагаемого в правой части равенства (31), аналогичных тем, которые использовались при получении самого равенства (31).

Так, при $\mu_r = \mu_s = 1$ и остальных μ_i , равных нулю, требуется дополнительно выделить члены, содержащие индекс s , в результате чего имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq r}}^{n-1} E_i \sum_{\substack{k>i \\ k \neq r}}^n E_k B_{ik} \cos(\delta_{1k} - \delta_{1i}) = \\ & = E_s \sum_{\substack{k>s \\ k \neq r}}^n E_k B_{sk} \cos(\delta_{1k} - \delta_{1s}) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq r, s}}^{n-1} E_i \sum_{\substack{k>i \\ k \neq r, s}}^n E_k B_{ik} \cos(\delta_{1k} - \delta_{1i}). \end{aligned}$$

После проведения подобных преобразований становится возможным получение в явном виде функции (17).

Очевидно, что подобные выкладки осуществимы для любой из прямых (16), когда значения коэффициентов μ_i выбираются равными нулю или единице. Однако в этом случае имеют место более громоздкие выкладки по сравнению с рассмотренными выше случаями n прямых, когда отлично от нуля только одно μ либо все μ одновременно равны единице. Чтобы избежать подобных выкладок, можно ограничиться констатацией полученного на их основе результата: на каждой прямой (16) функции $W(q)$ на интервале $[-\pi, +\pi]$ имеют один минимум и один максимум ($q = 0$). Практическое нахождение точек минимума можно осуществлять посредством численных методов оптимизации.

В силу (20), (21) отыскание минимума ведется в области $q > 0$ при $A^{(m)} > 0$, а при $A^{(m)} < 0$ – в области $q < 0$. Для определения знака величины $A^{(m)}$ используется формула

$$A^{(m)} = \sum_{j=2}^n (aT_{j1} - P_j) \mu_j^{(m)}, \quad (33)$$

которая получается непосредственной подстановкой (16) в (12).

Очевидно, что методы одномерной оптимизации применимы и на подробно рассмотренных ранее n прямых. При этом многие полученные выше достаточно громоздкие тригонометрические формулы при численных расчетах можно не использовать, достаточно ограничиться вычислением коэффициента $A^{(m)}$ по формуле (33). Для прямой с номером 1 следует положить в (33) все $\mu_j = 1$, а для остальных $n - 1$ прямых лишь одно $\mu_j = 1$, остальные $\mu_j = 0$. Соответствующие выражения для коэффициентов $A^{(1)}$ и $A^{(m)}$ ($m = 2, 3, \dots, n$) приведены в (28), (32).

По результатам одномерной оптимизации становится возможным указать по формулам (22) ряд точек, которые затем используются в качестве начальных приближений при поиске стационарных точек посредством решения системы уравнений (13). Может оказаться, что система (13) не имеет решений в окрестности некоторых задаваемых подобным образом начальных приближений, тогда итерационный процесс при решении системы (13) будет расходящимся.

Одна из рассмотренного выше множества экстремальных точек силовой функции (12) соответствует исходному устойчивому установившемуся режиму и является точкой максимума, остальные стационарные точки – седловым точкам функции Ляпунова. Значение силовой функции (12) в точке максимума обозначим V_{max} , а ее значения в других стационарных точках – V_r , где индекс r – номер стационарной точки, определенной в процессе указанной выше процедуры. Число таких точек не превышает $2^{n-1} - 1$.

Оценка l^* критериальной постоянной l , которая используется при исследовании динамической устойчивости электрических систем, проводится по формуле [2 – 4]

$$l^* = \min(V_{max} - V_r), \quad (34)$$

где индекс r принимает конечное множество значений.

Следует отметить, что оценку значения l^* можно приближенно получить без решения системы уравнений (13). Для этого полагаем

$$V_m \approx W(q_n^{(m)}),$$

где $q_n^{(m)}$ – точка минимума функции (17) на прямой с номером m , ее координата определяется по одной из формул [(20) или (21)], если функция

(17) представлена в аналитическом виде. В других случаях достаточно считать, что $W(q)$ образована подстановкой (16) в (12) с последующим использованием элементов теории неявно заданных функций и методов одномерной оптимизации.

При известных числовых значениях параметров, входящих в выражение функции (17), значения этой функции в точках минимума (20) и (21) определяются соответственно по формулам

$$\begin{aligned} W\left(q_H^{(m)}\right) &= A^{(m)}\left(\pi+2\alpha^{(m)}\right)-B^{(m)} \cos \alpha^{(m)}+R^{(m)} ; \\ W\left(q_H^{(m)}\right) &= A^{(m)}\left(-\pi+2\alpha^{(m)}\right)-B^{(m)} \cos \alpha^{(m)}+R^{(m)}, \end{aligned} \quad (35)$$

где использованы обозначения (32).

Возможно предложить следующий упрощенный алгоритм оценки критериальной постоянной l с использованием лишь n прямых вида (16), (23) и (30). Вначале для каждой из этих прямых по соответствующей из формул (35) определяется оценка значения V_m силовой функции в начальном приближении стационарной точки. Затем по этим значениям в порядке их убывания ранжируются соответствующие начальные приближения неустойчивых установившихся режимов, задаваемые формулами (22). В том же порядке проводится решение системы (13) при поиске неустойчивых установившихся режимов с начальными условиями (22). Фиксируется номер m , при котором впервые достигается сходимость итерационного процесса, и соответствующее значение V_m подставляется в (34) для определения величины l^* .

Аналогичные алгоритмы можно строить с использованием всего указанного множества из $2^{n-1} - 1$ прямых (16), когда коэффициенты μ оказываются равными либо нулю, либо единице. При этом в случае отсутствия в явном виде формул типа (35) необходимо применять численные методы одномерной оптимизации.

В заключение отметим, что при выборе направлений (16), вдоль которых исследуется характер изменения силовой функции, достаточно простые аналитические формулы для $W(q)$ получаются также, когда некоторые из коэффициентов μ_i полагаются равными -1 . В этом случае выражение $W(q)$ содержит дополнительно член, пропорциональный $\cos 2q$. Функции такого вида находят применение в теории простейшей электрической системы, и соответствующие результаты этой теории также могут использоваться в целях отыскания стационарных точек силовой функции (12).

Выводы

1. Применительно к исследованию синхронной динамической устойчивости многомашинных электрических систем указана возможность отыскания седловых точек функции Ляпунова посредством численного решения системы уравнений установившегося режима.

2. Начальные приближения при поиске седловых точек определяются посредством исследования на экстремум функций одного аргумента, которые получаются в результате рассмотрения потенциальной функции в пространстве относительных углов на прямых, проходящих через точку, соответствующую исходному устойчивому установившемуся режиму.

Приложение

В качестве расчетного примера рассмотрим трехмашинную схему из [2]. Расчет параметров устойчивого установившегося режима в соответствии с [7] производится посредством решения системы уравнений (29), где следует положить $n = 3$. Предварительно удобно в этой системе исключить переменные a и воспользоваться обозначениями

$$\psi_1 = \delta_{20} - \delta_{10}; \quad \psi_2 = \delta_{30} - \delta_{10}.$$

В результате система уравнений установившегося режима имеет вид

$$\begin{cases} -1,473 + 1,784 \sin(\psi_1 - 2,2^\circ) + 4,472 \sin(\psi_1 + 2,2^\circ) + \\ + 3,453 \sin(\psi_2 - 5,4^\circ) + 6,358 \sin(\psi_1 - \psi_2 + 10,5^\circ) = 0; \\ -0,597 + 1,784 \sin(\psi_1 - 2,2^\circ) + 3,453 \sin(\psi_2 - 5,4^\circ) + \\ + 3,115 \sin(\psi_2 + 5,4^\circ) + 2,288 \sin(\psi_2 - \psi_1 + 10,5^\circ) = 0; \end{cases} \quad (\text{П.1})$$

ее решение методом Ньютона с начальным приближением $\psi_1^{(0)} = \psi_2^{(0)} = 0$, что соответствует предположению о малости относительных углов в устойчивом установившемся режиме, отыскивается за две итерации:

$$\psi_1 = 2,904^\circ; \quad \psi_2 = 1,982^\circ; \quad a = 61 \cdot 10^{-7}, \quad (\text{П.2})$$

при этом невязки в (П.1) достаточно малы.

Теперь по формулам (6) – (8) определяются параметры консервативной системы (1), (2) и силовой функции (12):

$$\begin{aligned} P_2 - T_{J_2} a &= 0,0479; & P_3 - T_{J_3} a &= 0,0288; \\ E_1 E_2 B_{12} &= 0,6538; & E_1 E_3 B_{13} &= 1,2609; & E_2 E_3 B_{23} &= 0,9147, \end{aligned}$$

силовая функция задается формулой

$$\begin{aligned} V(x_1, x_2) &= 0,0479 x_1 + 0,0288 x_2 + 0,6538 \cos x_1 + \\ &+ 1,2609 \cos x_2 + 0,9147 \cos(x_2 - x_1), \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

*Методика численного определения и оценки областей
синхронной динамической устойчивости сложных
электроэнергетических систем в консервативной идеализации*

где использованы обозначения $x_i = \delta_i - \delta_1$ ($i = 2, 3$). Отметим, что при вычислении значений (П.3) переменные x_i в линейных по x_i членах выражения этой функции должны быть выражены в радианах.

Система уравнений (13) для определения экстремальных точек функции (П.3) имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x_1} = 0,0479 - 0,6538 \sin x_1 + 0,9147 \sin(x_2 - x_1) = 0; \\ \frac{\partial V}{\partial x_2} = 0,0288 - 1,2609 \sin x_2 - 0,9147 \sin(x_2 - x_1) = 0, \end{cases} \quad (\text{П.4})$$

в частности, ей удовлетворяет установившийся режим (П.2). Элементы матрицы Гессе (14) для (П.3) определяются по формулам

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} &= -0,6538 \cos x_1 - 0,9147 \cos(x_2 - x_1); \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial x_1} = 0,9147 \cos(x_2 - x_1); \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} &= -1,2609 \cos x_2 - 0,9147 \cos(x_2 - x_1). \end{aligned}$$

Вычисления по ним в точке (П.2) приводят к матрице H_1 и соответствующим условиям Сильвестра для главных миноров Δ_i :

$$H_1 = \begin{bmatrix} -1,57 & 0,91 \\ 0,91 & -2,17 \end{bmatrix}, \quad \Delta_{11} = -1,57 < 0; \quad \Delta_{22} = \begin{vmatrix} -1,57 & 0,91 \\ 0,91 & -2,17 \end{vmatrix} > 0,$$

следовательно, функция (П.3) в точке (П.2) имеет максимум [1].

Для отыскания неустойчивых стационарных точек вблизи устойчивой точки (П.2) вначале запишем выражение силовой функции (П.3) вдоль прямой

$$x_1 = 2,904^\circ + q; \quad x_2 = 1,982^\circ + q, \quad (\text{П.5})$$

которая соответствует выбору $\mu_2 = \mu_3 = 1$ в (16) при $n = 3$; здесь q – параметр, единицей измерения которого является градус. Подстановка (П.5) в (П.3) приводит к функции одного переменного вида (17)

$$W_1(q) = 0,91801 + 0,00134q + 1,91464 \cos(q + 2,2968^\circ). \quad (\text{П.6})$$

Отметим, что значение функции (П.6) при $q = 0$ совпадает со значением силовой функции (П.3) в точке (П.2):

$$W_1(0) = V(2,904^\circ; 1,982^\circ) = 2,8306,$$

тем самым (П.6) имеет максимум при $q = 0$.

Поскольку в (П.6) $A^{(1)} > 0$ и $A^{(1)} < B^{(1)}$, то ближайшая к $q = 0$ экстремальная точка функции (П.6) определяется по формуле (20):

$$q_H^{(1)} = 180^\circ - 2 \cdot 2,2968^\circ = 175,406^\circ; \quad (\text{П.7})$$

значение функции (П.6) в этой точке

$$W_1(175,406^\circ) = -0,76; \quad (\text{П.8})$$

на прямой (П.5) точке (П.7) соответствует точка с координатами $x_1^{(0)} = 178,310^\circ$; $x_2^{(0)} = 177,388^\circ$, которую принимаем в качестве начального приближения при поиске одной из неустойчивых стационарных точек посредством численного решения системы (П.4). В результате двух итераций метода Ньютона имеем

$$x_1 = 179,39579^\circ; \quad x_2 = 176,82638^\circ; \quad (\text{П.9})$$

значение силовой функции (П.3) в точке (П.9) равно $-0,7600898$, оно практически совпадает со значением (П.8) функции (П.6) в точке (П.7).

Характер экстремума функции (П.3) в точке (П.9) определяется на основе матрицы Гессе H_2 и ее главных миноров:

$$H_2 = \begin{bmatrix} -0,26 & 0,91 \\ 0,91 & 0,36 \end{bmatrix}, \quad \Delta_{11} = -0,26 < 0; \quad \Delta_{22} = \begin{vmatrix} -0,26 & 0,91 \\ 0,91 & 0,36 \end{vmatrix} < 0,$$

следовательно, функция (П.3) в точке (П.9) не достигает максимума и по теореме Четаева [1] положение равновесия (П.9) неустойчиво. Итак, точка (П.9) – одна из искомым неустойчивых стационарных точек.

Теперь рассмотрим изменение силовой функции (П.3) на прямой

$$x_1 = 2,904^\circ + q; \quad x_2 = 1,982^\circ, \quad (\text{П.10})$$

проходящей через устойчивое положение равновесия (П.2) и являющейся частным случаем множества прямых (16) при $n = 3$, когда коэффициенты выбираются следующим образом: $\mu_2 = 1$, $\mu_3 = 0$. В результате подстановки (П.10) в (П.3) имеет место функция вида (17)

$$W_2(q) = 1,26357 + 0,000836q + 1,56827 \cos(q + 1,748^\circ), \quad (\text{П.11})$$

значение которой при $q = 0$ совпадает с максимумом функции (П.3) в точке (П.2). Поскольку в (П.11) $A^{(2)} > 0$ и $A^{(2)} < B^{(2)}$, ближайшая к $q = 0$ экстремальная точка функции (П.11) определяется по (20): $q_H^{(2)} = 180^\circ - 2 \cdot 1,748^\circ = 176,504^\circ$, причем значение функции (П.11) в этой точке равно $-0,15641$.

Этой экстремальной точке на прямой (П.10) соответствует точка с координатами $x_1^{(0)} = 179,408^\circ$; $x_2^{(0)} = 1,982^\circ$, которая принимается в качестве начального приближения при поиске очередной неустойчивой стационарной точки силовой функции (П.3). Решение методом Ньютона системы (П.4) за две итерации приводит к результату

$$x_1 = 180,406^\circ; \quad x_2 = 3,698^\circ, \quad (\text{П.12})$$

значение функции (П.3) в точке (П.12) равно $-0,156$, что практически совпадает с указанным ранее значением функции (П.11) при $q = 0$.

*Методика численного определения и оценки областей
синхронной динамической устойчивости сложных
электроэнергетических систем в консервативной идеализации*

Характер экстремума силовой функции (П.3) определяется с использованием матрицы Гессе H_3 , составленной для стационарной точки (П.12), и соответствующих условий Сильвестра

$$H_3 = \begin{bmatrix} 1,57 & -0,91 \\ -0,91 & -0,35 \end{bmatrix}, \quad \Delta_{11} = 1,57 > 0; \quad \Delta_{22} = \begin{vmatrix} 1,57 & -0,91 \\ -0,91 & -0,35 \end{vmatrix} < 0,$$

это свидетельствует о том, что точка (П.12) неустойчива.

Аналогичным образом на прямой $x_1 = 2,904^\circ$; $x_2 = 1,982^\circ + q$ определяется точка

$$x_1 = 2,904^\circ; \quad x_2 = 180,460^\circ, \quad (\text{П.13})$$

однако ее использование в качестве начального приближения при решении системы (П.4) методом Ньютона приводит к расходящемуся итерационному процессу. Сходимость достигается [11], если начальные итерации осуществлять посредством численных методов оптимизации (градиентный, покоординатного спуска), когда в качестве целевой функции используется силовая функция (П.3). Метод Ньютона применяется на завершающей стадии итерационного процесса. В результате такой последовательности расчетов определяется точка $x_1 = -85,170^\circ$; $x_2 = 144,700^\circ$, при этом матрица Гессе и условия критерия Сильвестра имеют вид

$$H_4 = \begin{bmatrix} 0,53 & -0,59 \\ -0,59 & 1,62 \end{bmatrix}, \quad \Delta_{11} = 0,53 > 0; \quad \Delta_{22} = \begin{vmatrix} 0,53 & -0,59 \\ -0,59 & 1,62 \end{vmatrix} > 0,$$

это свидетельствует о том, что найденная точка является минимумом силовой функции, значение которого равно $-1,56203$. Следует отметить, что матрица Гессе в начальной точке (П.13) не была положительно определенной.

Итак, в рассматриваемом примере оказывается возможным найти *три стационарные точки* силовой функции, используя в качестве начальных приближений точки, определенные на основе предложенного метода. Сравнивая значения функции (П.3) в этих точках, делаем вывод, что в качестве критериальной следует принять точку (П.12), где силовая функция имеет наибольшее значение. Оценка значения критериальной постоянной проводится по (34): $I^* = 2,8306 - (-0,156) = 2,982$, что практически совпадает с оценкой, полученной для этого примера в [2] методом n -мерного куба; там $I^* = 2,924$.

Для оценки полученных результатов укажем все множество стационарных точек рассматриваемого примера. При этом достаточно ограничиться [4] квадратом со стороной 360° и центром в точке исходного установившегося режима (П.2). В дальнейшем целесообразно перейти к радианной мере угловых величин, тогда точки указанного квадрата удовлетворяют неравенствам

$$-3,09091 \leq x_1 \leq 3,19228; \quad -3,10700 \leq x_2 \leq 3,17619. \quad (\text{П.14})$$

Стационарным точкам соответствуют [12] точки пересечения кривых, задаваемых первым и вторым уравнениями системы (П.4).

Можно показать, что в пределах квадрата (П.14) первому уравнению системы (П.4) отвечают кривые, уравнения которых имеют вид $x_2 = x_2(x_1)$. Более конкретно – это уравнения

$$x_2 = x_1 + \pi - \arcsin z; \quad (\text{П.15})$$

$$x_2 = x_1 + 2\pi + \arcsin z ; \quad (\text{П.16})$$

$$x_2 = x_1 + \arcsin z ; \quad (\text{П.17})$$

$$x_2 = x_1 - \pi + \arcsin z , \quad (\text{П.18})$$

где $z = -0,05237 + 0,71477 \sin x_1$. Причем отрезок $[-3,09091; 3,19228]$ оси x_1 точками $\alpha_0 = -3,09091$; $\alpha_1 = -2,84148$; $\alpha_2 = -0,06275$; $\alpha_3 = 0,07333$; $\alpha_4 = 3,06826$; $\alpha_5 = 3,19228$ разбивается на пять интервалов. Эти интервалы различаются способами определения вида ветвей кривой, задаваемой первым уравнением из (П.4) в пределах квадрата (П.14). На каждом из них оказывается по две ветви: (α_0, α_1) – ветви (П.15), (П.16); (α_1, α_2) – ветви (П.15), (П.17); остальные три интервала – ветви (П.17), (П.18).

Аналогичным образом на отрезке $[-3,10700; 3,17619]$ оси x_2 второму уравнению системы (П.4) отвечают кривые вида $x_1 = x_1(x_2)$, которые могут принадлежать к одному из четырех типов:

$$x_1 = x_2 + \pi + \arcsin z ; \quad (\text{П.19})$$

$$x_1 = x_2 - \arcsin z ; \quad (\text{П.20})$$

$$x_1 = x_2 - \pi + \arcsin z ; \quad (\text{П.21})$$

$$x_1 = x_2 - 2\pi - \arcsin z , \quad (\text{П.22})$$

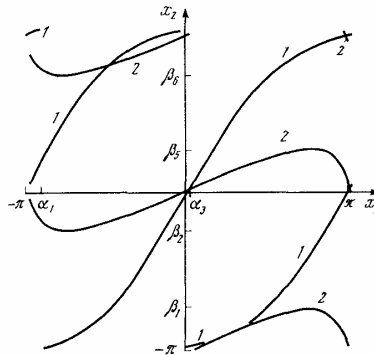
где $z = 0,03149 - 1,37848 \sin x_2$.

Указанный отрезок точками $\beta_0 = -3,10700$; $\beta_1 = -2,36256$; $\beta_2 = -0,77903$; $\beta_3 = -0,5062$; $\beta_4 = 0,02285$; $\beta_5 = 0,84546$; $\beta_6 = 2,29613$; $\beta_7 = 2,92669$; $\beta_8 = 3,11874$; $\beta_9 = 3,17619$ разбивается на интервалы таким образом, что на (β_0, β_1) , (β_3, β_4) , (β_4, β_5) имеют место ветви (П.19), (П.20); на (β_2, β_3) , (β_7, β_8) , (β_8, β_9) – ветви (П.20), (П.21); на (β_6, β_7) – ветви (П.21), (П.22). Наконец, на интервалах (β_0, β_1) , (β_1, β_2) в пределах квадрата (П.14) нет ни одной ветви.

На рисунке дано графическое представление всех ветвей кривых, определяемых уравнениями (П.4). Ветви, соответствующие первому уравнению, обозначены цифрой 1, а второму – 2. В первом квадранте имеются три точки пересечения этих ветвей, во втором – одна. Каждая из этих точек, кроме устойчивого установившегося режима, была получена выше с использованием другого подхода.

В четвертом квадранте ветви 1 образуют одну кривую, раздельное их изображение обусловлено тем, что в масштабе рисунка ветвь 1 будет касаться ветви 2. В действительности в четвертом квадранте эти ветви не имеют касаний и пересечений. Минимальный модуль разности ординат кривых 1 и 2 в четвертом квадранте равен 0,00281 рад, он достигается в точке $x_1 = 41,085^\circ$. Это устанавливается на основе методов оптимизации (метод золотого сечения). Значение функции (П.3) на кривой 2 в точке наибольшего сближения с кривой 1 равно $-1,59581$.

Следует отметить, что приближенная оценка критериальной постоянной в рассматриваемом примере может производиться без нахождения стационарных точек силовой функции. Достаточно воспользоваться ранее найденными значениями функций $W(q)$ в точках их минимумов на прямых (П.5), (П.10) и в точке (П.13). Последнее равно $-1,42863$. Ограничиваясь этой информацией, получим $I^* = 2,8306 - (-0,15641) = 2,98241$, что практически совпадает с полученным выше результатом.



Графический метод определения стационарных точек силовой функции

Библиографический список

1. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
2. Путилова А.Т., Тагиров М.А., Заславская Т.Е. Об аналитических критериях синхронной динамической устойчивости многомашинных систем // Изв. СО АН СССР. – 1968. Вып. 2. – №8. – С. 148–154.
3. Рудницкий М.П. Элементы теории устойчивости и управления режимами энергосистем. – Свердловск: Изд-во УПИ, 1984. – 96 с.
4. Вайман М.Я. Устойчивость нелинейных механических и электромеханических систем. – М.: Машиностроение, 1981. – 126 с.
5. Андreyков В.А., Сказываева Н.С. Методы построения консервативной модели энергосистемы для анализа режимов и устойчивости // Изв. РАН. Энергетика. – 1997. – №5. – С. 107–110.
6. Морoshкин Ю.В. Функции Ляпунова для математических моделей электрических систем при учете нагрузок статическими характеристиками и учете переходных процессов в контурах ротора // Электричество. – 1977. – №10. – С. 13–19.
7. Морoshкин Ю.В. К исследованию статической устойчивости сложных электрических систем // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1972. – № 2. – С. 44–50.
8. Веников В.А., Литкенс И.В. Математические основы теории автоматического управления режимами энергосистем. – М.: Высш. шк., 1964. – 202 с.
9. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. – М.: Физматгиз, 1959. – 916 с.
10. Заславская Т.Е., Веприк Ю.Н., Лифановский А.М. Моделирование группы синфазных генераторов в расчетах динамической устойчивости // Тр. СибНИИЭ. – 1977. – Вып. 34. – С. 76–88.
11. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. – М.: Высш. шк., 1994. – 544 с.
12. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1966. – 664 с.

УДК 621.311.016.35

Область устойчивости в большом консервативных электроэнергетических систем соизмеримой мощности

М.Ш. Мисриханов, д-р техн. наук, Ю.В. Морошкин, канд. техн. наук

Проведено сравнение областей динамической устойчивости стационарных режимов при двух способах выбора переменных, по которым исследуется устойчивость.

Исследование устойчивости стационарных режимов консервативных электроэнергетических систем без шин неизменного напряжения, когда система уравнений переходных электромеханических процессов записывается в общепринятом виде

$$T_{ji} \ddot{\delta}_i = P_{Ti} - P_i(\delta_i - \delta_1, \dots, \delta_i - \delta_n) \quad (i = 1, \dots, n), \quad (1)$$

где

$$P_i = E_i^2 Y_{ii} \sin \alpha_{ii} + E_i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n E_k Y_{ik} \sin(\delta_i - \delta_k), \quad (2)$$

может осуществляться по двум наборам переменных [1, 2].

Первый из них включает $n - 1$ относительных углов и n абсолютных скоростей:

$$\delta_{12} = \delta_1 - \delta_2, \dots, \delta_{1n} = \delta_1 - \delta_n, \quad \omega_1 = \dot{\delta}_1, \dots, \omega_n = \dot{\delta}_n. \quad (3)$$

Второй набор переменных состоит из $n - 1$ относительных углов и $n - 1$ относительных скоростей:

$$\delta_{12}, \dots, \delta_{1n}, \omega_{12} = \omega_1 - \omega_2 = \dot{\delta}_1 - \dot{\delta}_2, \dots, \omega_{1n} = \omega_1 - \omega_n = \dot{\delta}_1 - \dot{\delta}_n. \quad (4)$$

Применительно к исследованию устойчивости стационарных режимов системы (1), (2) по переменным (3) может использоваться функция Ляпунова [1, 2]:

$$W_{10} = K_1(\omega_1, \dots, \omega_n) - V(\delta_{12}, \dots, \delta_{1n}) + V(\delta_{12}^{(0)}, \dots, \delta_{1n}^{(0)}), \quad (5)$$

где $\delta_{li}^{(0)}$ – постоянные разности фазовых углов генераторов в стационарных режимах, функция K_1 зависит только от переменных ω_i ($i = 1, \dots, n$):

$$K_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n T_{Ji} \omega_i^2, \quad (6)$$

а выражение функции $V(\delta_{12}, \dots, \delta_{1n})$ записывается с помощью формулы

$$V = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (P_{Tj} - E_j^2 Y_{jj} \sin \alpha_{jj}) (\delta_{1i} - \delta_{1j}) + \\ + a \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n T_{Jj} (\delta_{1j} - \delta_{1i}) + \sum_{i=1}^{n-1} E_i \sum_{k>i}^n E_k Y_{ik} \cos(\delta_{1k} - \delta_{1j}). \quad (7)$$

Здесь a – угловое ускорение в стационарном режиме [1]:

$$a = \frac{\left[\sum_{i=1}^n (P_{Ti} - E_i^2 Y_{ii} \sin \alpha_{ii}) \right]}{\sum_{i=1}^n T_{Ji}}. \quad (8)$$

При исследовании устойчивости по переменным (4) используется функция Ляпунова [1, 2]

$$W_2 = K_2^{(2)} - V(\delta_{12}, \dots, \delta_{1n}) + V(\delta_{12}^{(0)}, \dots, \delta_{1n}^{(0)}), \quad (9)$$

где $K_2^{(2)}$ является функцией переменных ω_k ($k = 2, \dots, n$):

$$K_2^{(2)} = \frac{T_{J1} \sum_{k=2}^n T_{Jk} \omega_k^2 + \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{k>i}^n T_{Ji} T_{Jk} (\omega_k - \omega_i)^2}{2 \sum_{j=1}^n T_{Jj}}. \quad (10)$$

Следует отметить, что каждая из функций Ляпунова (5) и (9) строится на основе одного из двух специального вида интегралов системы (1), (2). Каждый такой интеграл получается посредством некоторой линейной комбинации трех известных интегралов системы (1): постоянства количества движения, движения центра масс, интеграла энергии [1].

Области устойчивости в большом (динамической устойчивости) стационарных режимов, построенные с использованием функций Ляпунова (5), (9), расположены в различных пространствах. В случае функции (5) – это пространство переменных (3), а при использовании функции Ляпунова (9) область устойчивости находится в пространстве переменных (4).

Область устойчивости по переменным (3), определяемая с использованием функции Ляпунова (5), ограничена в пространстве этих переменных замкнутой частью поверхности [2]

$$K_1(\omega_1, \dots, \omega_n) - V(\delta_{12}, \dots, \delta_{1n}) + V(\delta_{12}^{(1)}, \dots, \delta_{1n}^{(1)}) = 0, \quad (11)$$

где $\delta_{1i}^{(1)}$ ($i = 2, \dots, n$) – первые $n - 1$ координат критической точки

$$(\delta_{12}^{(1)}, \dots, \delta_{1n}^{(1)}, 0, \dots, 0) \quad (12)$$

функции Ляпунова (5), последние n ее координат равны нулю. Координаты критической точки согласно [3, 4] удовлетворяют системе нелинейных уравнений

$$\frac{\partial V}{\partial \delta_{1k}} = 0 \quad (k = 2, \dots, n); \quad \frac{\partial K_1}{\partial \omega_i} = T_i \omega_i = 0 \quad (i = 1, \dots, n), \quad (13)$$

поскольку K_1 определяется формулой (6). Если существует более одной критической точки, то выбирается та из них, которая расположена ближе к точке

$$(\delta_{12}^{(0)}, \dots, \delta_{1n}^{(0)}, 0, \dots, 0), \quad (14)$$

соответствующей стационарному режиму.

В пространстве переменных (4) область устойчивости ограничена поверхностью

$$K_2^{(2)}(\omega_{12}, \dots, \omega_{1n}) - V(\delta_{12}, \dots, \delta_{1n}) - K_2^{(2)}(\omega_{12}^{(k)}, \dots, \omega_{1n}^{(k)}) + V(\delta_{12}^{(k)}, \dots, \delta_{1n}^{(k)}) = 0, \quad (15)$$

где $\delta_{1i}^{(k)}$, $\omega_{1i}^{(k)}$ ($i = 2, \dots, n$) – координаты критической точки

$$(\delta_{12}^{(k)}, \dots, \delta_{1n}^{(k)}, \omega_{12}^{(k)}, \dots, \omega_{1n}^{(k)}) \quad (16)$$

функции Ляпунова (9).

Координаты точки (16) удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\partial V}{\partial \delta_{1k}} = 0; \quad \frac{\partial K_2^{(2)}}{\partial \omega_k} = 0 \quad (k = 2, \dots, n). \quad (17)$$

Из сравнения систем (13) и (17) следует, что первые $n - 1$ координат точек (12) и (16) совпадают между собой:

$$\delta_{1k}^{(k)} = \delta_{1k}^{(1)} \quad (k = 2, \dots, n). \quad (18)$$

Покажем теперь, что $n - 1$ координат ω_j ($j = 2, \dots, n$) критической точки (16) равны нулю. Для этого функцию

$$\varphi = \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{k>i}^n T_{Ji} T_{Jk} (\omega_{1k} - \omega_{1i})^2, \quad (19)$$

входящую в выражение (10) для $K_2^{(2)}$, преобразуем следующим образом. Зададимся некоторым фиксированным значением j индекса i и выделим все слагаемые в правой части (19), содержащие переменные ω_j . В результате получим

$$\varphi = T_{Jj} \sum_{k=j+1}^n T_{Jk} (\omega_k - \omega_j)^2 + \sum_{i=2, i \neq j}^{n-1} T_{Ji} \sum_{k>i}^n T_{Jk} (\omega_{1k} - \omega_{1i})^2 = \varphi_1 + \varphi_2,$$

где использованы обозначения:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= T_{Jj} \sum_{k=j+1}^n T_{Jk} (\omega_{1k} - \omega_{1j})^2 + \sum_{i=2}^{j-1} T_{Ji} T_{Jj} (\omega_{1j} - \omega_{1i})^2; \\ \varphi_2 &= \sum_{i=j+1}^{n-1} T_{Ji} \sum_{k>j+1}^n T_{Jk} (\omega_{1k} - \omega_{1i})^2 + \sum_{i=2}^{j-1} T_{Ji} \sum_{k>i}^{j-1} T_{Jk} (\omega_{1k} - \omega_{1i})^2. \end{aligned}$$

Отметим, что φ_2 не зависит от ω_j , поэтому

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \omega_j} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \omega_j} = 2T_{Jj} \left[\left(\sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^n T_{Ji} \right) \omega_j - \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^n T_{Ji} \omega_{1i} \right], \quad (20)$$

кроме того,

$$\frac{\partial}{\partial \omega_j} \left[T_{J1} \sum_{k=2}^n T_{Jk} \omega_{1k}^2 \right] = 2T_{J1} T_{Jj} \omega_{1j}. \quad (21)$$

Исходя из (10), (19) – (21) уравнения $\frac{\partial K_2^{(2)}}{\partial \omega_i} = 0$ ($i = 2, \dots, n$) в (17) с

точностью до постоянных множителей $2T_{Jj} \left(\sum_{i=1}^n T_{Ji} \right)^{-1}$ записываются в виде

$$\left(\sum_{i=1}^n T_{Ji} - T_{Jj} \right) \omega_{1j} - \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^n T_{Ji} \omega_{1i} = 0 \quad (j = 2, \dots, n). \quad (22)$$

Уравнения (22) представляют собою систему $n - 1$ линейных относительно $n - 1$ неизвестных ω_{1i} ($i = 2, \dots, n$) уравнений, причем правые части этих уравнений равны нулю, то есть система (22) является однородной. При условии, что определитель матрицы коэффициентов этой системы отличен от нуля, она обладает единственным решением:

$$\omega_{1i} = 0 \quad (i = 2, \dots, n). \quad (23)$$

Определитель системы (22) имеет вид

$$\begin{vmatrix} \left(\sum_{k=1}^n T_{Jk} - T_{J2} \right) & -T_{J3} & \dots & -T_{Jn} \\ -T_{J2} & \left(\sum_{k=1}^n T_{Jk} - T_{J2} \right) & \dots & -T_{Jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -T_{J2} & -T_{J3} & \dots & \left(\sum_{k=1}^n T_{Jk} - T_{Jn} \right) \end{vmatrix},$$

прибавим к первому столбцу остальные, в результате получим равный ему определитель

$$\begin{vmatrix} T_{J1} & -T_{J3} & \dots & -T_{Jn} \\ T_{J1} & \left(\sum_{k=1}^n T_{Jk} - T_{J3} \right) & \dots & -T_{Jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{J1} & -T_{J3} & \dots & \left(\sum_{k=1}^n T_{Jk} - T_{Jn} \right) \end{vmatrix}.$$

Если теперь первую строку вычесть из остальных, то определитель преобразуется к треугольному виду

$$\begin{vmatrix} T_{J1} & -T_{J3} & \dots & -T_{Jn} \\ 0 & \sum_{k=1}^n T_{Jk} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{k=1}^n T_{Jk} \end{vmatrix} = T_{J1} \cdot \left(\sum_{k=1}^n T_{Jk} \right)^{n-2},$$

откуда и следует, что определитель системы (22) отличен от нуля.

В силу (18) и (23) уравнение поверхности (15), ограничивающей область устойчивости стационарного режима в пространстве переменных (4), принимает следующий вид:

$$K_2^{(2)}(\omega_{12}, \dots, \omega_{1n}) - V(\delta_{12}, \dots, \delta_{1n}) + V(\delta_{12}^{(1)}, \dots, \delta_{1n}^{(1)}) = 0, \quad (24)$$

поскольку согласно (10) имеет место равенство

$$K_2^{(2)}(0, \dots, 0) = 0.$$

Итак, в зависимости от выбора переменных, по которым ведется исследование устойчивости одного и того же стационарного режима электроэнергетической системы имеют место две области устойчивости в большом. В пространстве переменных (3) область устойчивости ограничена замкнутой частью поверхности (11), включающей критическую точку (12). В пространстве переменных (4) область устойчивости ограничена поверхностью (24).

Сравнение этих областей должно производиться с учетом того, что переход от переменных (3) к переменным (4) осуществляется посредством вырожденного линейного преобразования

$$Z = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} X, \quad (25)$$

где Z и X – векторы,

$$Z = (\delta_{12}, \dots, \delta_{1n}, \omega_{12}, \dots, \omega_{1n})^T, \quad X = (\delta_{12}, \dots, \delta_{1n}, \omega_1, \dots, \omega_n)^T,$$

размерности которых соответственно $2n - 2$ и $2n - 1$, T – знак транспонирования; E и B – матрицы:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{bmatrix},$$

размерность единичной матрицы $E - n \times n$, а матрицы $B - (n - 1) \times n$.

Обратить преобразование (25) невозможно. Но подстановка выражения переменных Z через X , то есть переменных (4) через переменные (3), в выражение для $K_2^{(2)}$ приводит к представлению $K_2^{(2)}(\omega_{12}, \dots, \omega_{1n})$ через $\omega_i (i = 1, \dots, n)$. При этом будет иметь место установленное в [1] тождество

$$K_2^{(2)} = K_2^{(1)} = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n T_{Ji} \omega_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n T_{Ji} \omega_i \right)^2}{\sum_{i=1}^n T_{Ji}} \right], \quad (26)$$

которое может быть получено также на основе тождества Лагранжа [2].

При преобразовании пространства переменных (3) в пространство переменных (4) и вырожденности (25) прообразом поверхности (24) в силу тождества (26) является поверхность

$$K_2^{(1)} - V(\delta_{12}, \dots, \delta_{1n}) + V(\delta_{12}^{(1)}, \dots, \delta_{1n}^{(1)}) = 0. \quad (27)$$

Область в пространстве переменных (3), ограниченная поверхностью (27), является прообразом в этом пространстве области в пространстве переменных (4), ограниченной поверхностью (24).

Таким образом, в пространстве переменных (3) установлен прообраз области устойчивости стационарного режима, имеющий место в пространстве переменных (4). В результате этого сравнение областей устойчивости в пространствах переменных (3) и (4) можно проводить в пространстве переменных (3) посредством сопоставления области устойчивости в пространстве переменных (3) и прообраза в том же пространстве области динамической устойчивости в пространстве переменных (4).

В [2] подобное сравнение осуществлялось в конечном числе сечений областей, ограниченных поверхностями (11) и (27). В качестве секущих поверхностей использовались двумерные линейные многообразия, проходящие через точку (14), соответствующую стационарному режиму. Базисные векторы двумерных многообразий имеют в качестве начала точку (14) и параллельны одной из пар координатных осей δ_{i_i} ($i = 2, \dots, n$), ω_k ($k = 1, \dots, n$).

В результате таких сравнений установлено, что в сечениях, параллельных любой паре осей $\delta_{i_i}, \delta_{i_k}$ ($i \neq k$), различия между областью устойчивости по переменным (3) и прообразом аналогичной области по переменным (4) отсутствуют [2]. Различия имеют место в сечениях, параллельных парам координатных осей δ_{i_i}, ω_k и парам осей ω_i, ω_k . Причем в сечении прообраза области устойчивости в пространстве переменных (4) имеет место множество, которое включает аналогичное множество в сечении области устойчивости по переменным (3). Указанные результаты в [2] установлены в общем виде для любого значения n в системе (1), (2). Но они ограничиваются исключительно указанными выше сечениями двумерных линейных многообразий.

Все это косвенно свидетельствует о том, что в пространстве переменных (3) прообраз области устойчивости в пространстве переменных (4) содержит в качестве подмножества область устойчивости по переменным (3).

Приведем дополнительное соображение в пользу такого вывода. Отметим, что если некоторая точка

$$(\delta_{12}, \dots, \delta_{1n}, \omega_1, \dots, \omega_n)$$

лежит на поверхности (27), то на этой поверхности находится любая точка семейства

$$(\delta_{12}^{(1)}, \dots, \delta_{ln}^{(1)}, \omega_1 + q, \dots, \omega_n + q), \quad (28)$$

где q – числовой параметр, принимающий любые действительные значения. Справедливость подобного утверждения следует из тождества (26), согласно которого $K_2^{(1)} \equiv K_2^{(2)}$.

Поскольку значение параметра q может быть сколь угодно большим, то точка (28) с ростом q удаляется в бесконечность. Тем самым поверхность (27) и ограничиваемая ею область, включающая устойчивое состояние (14), оказываются неограниченными в направлении вектора

$$g = (0, \dots, 0, 1, \dots, 1), \quad (29)$$

у которого $n - 1$ первых координат имеют нулевые значения, а n последних координат равны единице.

В частности, бесконечное семейство точек

$$(\delta_{12}^{(0)}, \dots, \delta_{ln}^{(0)}, q, \dots, q), \quad (30)$$

которому при $q = 0$ принадлежит и стационарная точка (14), целиком находится во множестве, являющемся прообразом области устойчивости по переменным (4).

В то же время любая из точек (30) при достаточно большом q не покидает область устойчивости по переменным (3). Это является дополнительным доводом в пользу утверждения, что в пространстве переменных (3) прообраз области устойчивости в пространстве переменных (4) включает область устойчивости по переменным (3). Численная иллюстрация этого в [2] проведена на примере трехмашинной системы без шин неизменного напряжения.

Интересно также отметить, что при достаточно малых по модулю значениях координат ω_i точек поверхности (11) эти точки расположены внутри области, ограниченной поверхностью (27). Чтобы показать это, определим значения l функций Ляпунова (5) и (9) в их критических точках. Подстановка (12) в (5) дает

$$l = V(\delta_{12}^{(0)}, \dots, \delta_{ln}^{(0)}) - V(\delta_{12}^{(1)}, \dots, \delta_{ln}^{(1)}), \quad (31)$$

то же самое значение l получается при подстановке координат соответствующей критической точки в выражение функции (9).

Если теперь координаты произвольной точки поверхности (11) подставить в выражение функции Ляпунова (9), то в силу (26) и (31) получим

$$\begin{aligned}
 W_2 &= K_2^{(1)}(\omega_1, \dots, \omega_2) - V(\delta_{12}, \dots, \delta_{1n}) + V(\delta_{12}^{(0)}, \dots, \delta_{1n}^{(0)}) = \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{\left(\sum_{i=1}^n T_{Ji} \omega_i \right)^2}{\left(\sum_{i=1}^n T_{Ji} \right)} + \left[K_1(\omega_1, \dots, \omega_n) - V(\delta_{12}, \dots, \delta_{1n}) + V(\delta_{12}^{(1)}, \dots, \delta_{1n}^{(1)}) \right] + \\
 &+ V(\delta_{12}^{(0)}, \dots, \delta_{1n}^{(0)}) - V(\delta_{12}^{(1)}, \dots, \delta_{1n}^{(1)}) = -\frac{1}{2} \frac{\left(\sum_{i=1}^n T_{Ji} \omega_i \right)^2}{\left(\sum_{i=1}^n T_{Ji} \right)} + l,
 \end{aligned} \tag{32}$$

поскольку выражение в квадратных скобках согласно (11) равно нулю.

В результате убеждаемся в принадлежности точек на поверхности (11), координаты ω которых удовлетворяют условию

$$\left[\frac{1}{2} \frac{\left(\sum_{i=1}^n T_{Ji} \omega_i \right)^2}{\left(\sum_{i=1}^n T_{Ji} \right)} \right] < l, \tag{33}$$

к прообразу области устойчивости по переменным (4) в пространстве переменных (3). Действительно, в подобных точках для функции Ляпунова (9) согласно (32), (33) имеют место неравенства

$$0 \leq W_2 \leq l,$$

свидетельствующие о принадлежности таких точек области, ограниченной поверхностью (27).

Далее проводится специальное рассмотрение простейшей системы, состоящей из двух станций соизмеримой мощности. Оно проводится в целях установления идентичности между интегралами, которые традиционно используются [5] при исследовании устойчивости стационарных режимов простейшей двухмашинной системы, и интегралами из [1].

Система уравнений (1), (2) в случае простейшей системы из двух станций имеет вид

$$\begin{cases} T_{J1} \ddot{\delta}_1 = P_1 - A \sin(\delta_1 - \delta_2), \\ T_{J2} \ddot{\delta}_2 = P_2 - A \sin(\delta_2 - \delta_1), \end{cases} \tag{34}$$

где

$$P_i = P_{Ti} - E_i^2 Y_{ii} \sin \alpha_{ii} \quad (i = 1, 2); \quad A = E_1 E_2 Y_{12}.$$

Набор переменных (4) при $n = 2$ записывается в виде

$$\delta_{12} = \delta_1 - \delta_2; \quad \omega_{12} = \omega_1 - \omega_2 = \dot{\delta}_1 - \dot{\delta}_2. \quad (35)$$

Для получения уравнений относительно переменных (35) согласно [5] следует систему (34) предварительно переписать в виде

$$\begin{cases} \ddot{\delta}_1 = \frac{P_1}{T_{J1}} - \frac{A}{T_{J1}} \sin(\delta_1 - \delta_2), \\ \ddot{\delta}_2 = \frac{P_2}{T_{J2}} - \frac{A}{T_{J2}} \sin(\delta_1 - \delta_2), \end{cases}$$

откуда, вычитая из первого уравнения второе, получим искомое уравнение

$$\ddot{\delta}_{12} = P - B \sin \delta_{12}, \quad (36)$$

где использованы обозначения

$$P = \frac{P_1}{T_{J1}} - \frac{P_2}{T_{J2}}; \quad B = A \left(\frac{1}{T_{J1}} + \frac{1}{T_{J2}} \right).$$

В дальнейшем удобно уравнение (36) представить в эквивалентном виде, разделив обе его части на

$$\frac{1}{T_{J1}} + \frac{1}{T_{J2}} = \frac{T_{J1} + T_{J2}}{T_{J1} \cdot T_{J2}},$$

в результате вместо (36) будет рассматриваться уравнение

$$\frac{T_{J1} T_{J2}}{T_{J1} + T_{J2}} \ddot{\delta}_{12} = \tilde{P} - A \sin \delta_{12}, \quad (37)$$

где

$$\tilde{P} = \frac{P_1 T_{J2} - P_2 T_{J1}}{T_{J1} + T_{J2}}. \quad (38)$$

В [5] уравнение (37) рассматривается как уравнение переходных электромеханических процессов для одного генератора, работающего на шины бесконечной мощности. Интеграл энергии для уравнения (37) имеет вид

$$\frac{1}{2} \frac{T_{J1} T_{J2}}{T_{J1} + T_{J2}} \dot{\delta}_{12}^2 - U_1(\delta_{12}) = C, \quad (39)$$

где силовая функция определяется формулой

$$U_1 = \tilde{P} \delta_{12} + A \cos \delta_{12}. \quad (40)$$

Интеграл энергии для уравнения (37) положен в основу метода исследования устойчивости по переменным (35) стационарных решений двухмашинной системы (34) (см. [5]).

Теперь для подобных исследований согласно [1, 2] воспользуемся функцией Ляпунова (9), где выражение для $K_2^{(2)}$ может быть задано в одном из двух эквивалентных видов [(10) или (26)]. Причем применительно к системе (34) в перечисленных формулах следует принять $n = 2$.

Тогда функция Ляпунова (9) может быть записана в виде

$$W = \frac{1}{2} \left[T_{J1} \omega_1^2 + T_{J2} \omega_2^2 - \frac{(T_{J1} \omega_1 + T_{J2} \omega_2)^2}{T_{J1} + T_{J2}} \right] - V(\delta_{12}) + V(\delta_{12}^{(0)})$$

или после выполнения элементарных выкладок

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{T_{J1} T_{J2}}{T_{J1} + T_{J2}} (\omega_1 - \omega_2)^2 - V(\delta_{12}) + V(\delta_{12}^{(0)}). \quad (41)$$

Что касается выражения для $V(\delta_{12})$, то его можно получить из (7) при $n = 2$. А проще воспользоваться общей формулой [1]

$$V(\delta_{12}, \dots, \delta_{ln}) = U(\delta_1, \dots, \delta_n) - a \sum_{i=1}^n T_{Ji} \delta_i,$$

где $U(\delta_1, \dots, \delta_n)$ – силовая функция для правых частей системы (1), (2).

При $n = 2$ предыдущая формула имеет вид

$$V(\delta_{12}) = U(\delta_1, \delta_2) - a(T_{J1}\delta_1 + T_{J2}\delta_2), \quad (42)$$

где силовая функция $U(\delta_1, \delta_2)$ определяется по формуле

$$\begin{aligned} U(\delta_1, \delta_2) &= \int_{\delta_{10}}^{\delta_1} [P_1 - A \sin(\delta_1 - \delta_{20})] d\delta_1 + \int_{\delta_{20}}^{\delta_2} [P_2 - A \sin(\delta_2 - \delta_1)] d\delta_2 = \\ &= [P_1\delta_1 + A \cos(\delta_1 - \delta_{20})]_{\delta_{10}}^{\delta_1} + [P_2\delta_2 + A \cos(\delta_2 - \delta_1)]_{\delta_{20}}^{\delta_2} = \\ &= P_1\delta_1 + P_2\delta_2 + A \cos(\delta_2 - \delta_1) + C. \end{aligned}$$

Здесь постоянная $C = -P_1\delta_{10} - P_2\delta_{20} - A \cos(\delta_{10} - \delta_{20})$. Определение силовой функции $U(\delta_1, \delta_2)$ осуществлено посредством интегрирования по контуру: вначале по отрезку от точки $(\delta_{10}, \delta_{20})$ до точки (δ_1, δ_{20}) , а затем от (δ_1, δ_{20}) до (δ_1, δ_2) .

Выражение для функции (42) имеет вид

$$V(\delta_{12}) = P_1\delta_1 + P_2\delta_2 + A \cos(\delta_2 - \delta_1) - a(T_1\delta_1 + T_2\delta_2).$$

К первой части этого равенства добавим величину

$$\left[a(T_{J1} + T_{J2}) - (P_1 + P_2) \right] \delta_2,$$

которая в силу выражения (8) для углового ускорения в стационарном режиме, имеющего в данном случае вид

$$a = \frac{P_1 + P_2}{T_{J1} + T_{J2}}, \quad (43)$$

тождественно равна нулю. После чего в результате элементарных преобразований получаем формулу для V в зависимости от δ_{12} :

$$V(\delta_{12}) = P_1\delta_{12} - aT_{J1}\delta_{12} + A\cos\delta_{12}. \quad (44)$$

Она находится в полном соответствии с (7), если принять $n = 2$.

При внешнем сравнении функций Ляпунова (41), (44) и функции, образованной на основе интеграла (38) – (40), выявляется, что каждая из них в качестве составляющих их слагаемых имеет одну и ту же функцию $\frac{1}{2} \cdot \frac{T_{J1}T_{J2}}{T_{J1}+T_{J2}} \dot{\delta}_{12}^2$, зависящую от относительной скорости $\dot{\delta}_{12}$. Тогда как другие их составляющие – это функции (38), (40) и (44) относительно угла δ_{12} – различаются по внешнему виду.

В действительности это не так, и выражением (43) функции $U_1(\delta_{12})$, $V(\delta_{12})$ тождественно преобразуются одна в другую. Выражение для \tilde{p} из (38) можно в силу (43) преобразовать следующим образом:

$$\tilde{p} = \frac{P_1T_{J2} + P_1T_{J1} - P_1T_{J1} - P_2T_{J1}}{T_{J1} + T_{J2}} = P_1 - aT_{J1},$$

в результате чего из (40) следует, что

$$U_1 = (P_1 - aT_{J1})\delta_{12} + A\cos\delta_{12} \equiv V(\delta_{12}).$$

Таким образом, функция Ляпунова, построенная на основе интеграла энергии одномашинного эквивалента, совпадает с функцией Ляпунова (41), (44), полученной в соответствии с общим методом из [1].

В пространстве переменных δ_{12} , $\dot{\delta}_{12}$ область динамической устойчивости согласно (24) ограничена поверхностью

$$\frac{1}{2} \frac{T_{J1}T_{J2}}{T_{J1}+T_{J2}} \dot{\delta}_{12}^2 - V(\delta_{12}) + V(\delta_{12}^{(k)}) = 0.$$

Прообразом этой области в пространстве переменных δ_{12} , ω_1 , ω_2 служит множество, которое ограничено поверхностью

$$\frac{1}{2} \frac{T_{J1} T_{J2}}{T_{J1} + T_{J2}} (\omega_1 - \omega_2)^2 - V(\delta_{12}) + V(\delta_{12}^{(k)}) = 0. \quad (45)$$

Прообраз включает прямую

$$\delta_{12} = \delta_{12}^{(0)}, \quad \omega_1 = q, \quad \omega_2 = q, \quad (46)$$

которой в пространстве переменных δ_{12} , $\dot{\delta}_{12}$ соответствует одна единственная стационарная точка $(\delta_{12}^{(0)}, 0)$.

В пространстве переменных δ_{12} , ω_1 , ω_2 область динамической устойчивости по этим же переменным ограничена замкнутой частью поверхности

$$T_{J1} \frac{\omega_1^2}{2} + T_{J2} \frac{\omega_2^2}{2} - V(\delta_{12}) + V(\delta_{12}^{(0)}) = 0,$$

уравнение которой может быть получено из (11) при $n = 2$. Эта область не может целиком включать бесконечную прямую (46), которая лежит в области, ограниченной поверхностью (45).

Таким образом, ограниченная в пространстве переменных δ_{12} , $\dot{\delta}_{12}$ область динамической устойчивости в качестве прообраза в пространстве переменных δ_{12} , ω_1 , ω_2 имеет бесконечную в направлении вектора $(0, 1, 1)$ область, которая не совпадает с областью динамической устойчивости по переменным δ_{12} , ω_1 , ω_2 .

Библиографический список

1. **Морошкин Ю.В.** К исследованию статической устойчивости сложных электрических систем // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1972. – №2. – С. 44–50.
2. **Мисриханов М.Ш., Морошкин Ю.В.** Два способа оценки области синхронной динамической устойчивости консервативных моделей электроэнергетических систем соизмеримой мощности // Вестник ИГЭУ. – Вып. 2. – 2003. – С. 57–67.
3. **Путилова А.Т., Тагиров М.А.** К различению стационарных точек функции Ляпунова или ее составляющих // Тр. СибНИИЭ. – М.: Энергия, 1975. – Вып. 26. – С. 36–39.
4. **Подшивалов В.И.** Связка функций Ляпунова для систем с демпфированием // Тр. СибНИИЭ. – М.: Энергия, 1975. – Вып. 26. – С. 57–60.
5. **Веников В.А.** Переходные электромеханические процессы в электрических системах. – М.: Высш. шк., 1985. – 536 с.

УДК 621.311.01

Выделение элементарных задач в алгоритмах расчета переходных электромеханических процессов

М.Ш. Мисриханов, д-р техн. наук, Ю.В. Морошкин, канд. техн. наук

Рассмотрена одна общая система уравнений, которая обладает всеми особенностями систем уравнений электромеханических переходных процессов в электроэнергетических системах (ЭЭС), важными с точки зрения построения численных алгоритмов расчета динамических переходов на конечных отрезках времени. Такое обобщение позволяет наглядно и коротко проиллюстрировать математические и вычислительные приемы, используемые в специальных вычислительных комплексах по расчетам динамической устойчивости на ЭВМ.

Основная особенность алгоритмов расчета переходных процессов – специальная комбинация численных методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений и численных методов решения систем нелинейных или линейных уравнений – хорошо известна, начиная с работ [1, 2]. Однако описание этих алгоритмов достаточно громоздко. Предлагаемый подход существенно упрощает описание основных деталей комбинации различных методов в указанных алгоритмах.

Итак, будем рассматривать систему уравнений общего вида

$$\frac{du_1}{dt} = f(t, u_1, u_2, u_3, u_4), \quad (1)$$

$$A(t, u_1, u_2, u_3, u_4) \frac{du_2}{dt} = a(t, u_1, u_2, u_3, u_4, u'_1, u'_3), \quad (2)$$

$$B(t, u_1) u_3 = b(t, u_1), \quad (3)$$

$$D(t, u_1, u_2, u_3) u_4 = d(t, u_1, u_2, u_3) \quad (4)$$

относительно неизвестных вектор-функций

$$u_1, u_2, u_3, u_4 \quad (5)$$

независимого переменного t .

Количество искоемых функций (5) равно числу уравнений системы (1) – (4), $(du/dt) = u'$. Поясним обозначения, использованные при напи-

сании системы (1) – (4): f, a, b, d – известные вектор-функции своих аргументов; A, B, D – известные квадратные матрицы.

Основные структурные особенности системы уравнений (1) – (4) заключаются в следующем.

Во-первых, система одновременно включает в себя как дифференциальные уравнения, так и нелинейные уравнения связи. Следствием этого является то, что неизвестные (5) естественным образом разбиваются на две группы: к первой группе относятся переменные u_1, u_2, u_3 – они входят в систему уравнений вместе с производными по времени t , ко второй группе относятся переменные u_4 , производные которых явно в систему (1) – (4) не входят.

Во-вторых, важной особенностью системы (1) – (4) является то, что производные переменных первой группы входят лишь в уравнения (1), (2). Так как число этих уравнений меньше числа переменных, входящих в первую группу, то невозможно из (1), (2) получить выражения для всех производных. Кроме того, производные неравноправным образом входят в систему: так производные du_1/dt не зависят явным образом от остальных производных, тогда как производные du_2/dt и du_3/dt связаны уравнениями (2), причем число уравнений (2) равно числу неизвестных u_2 , что совсем не предполагается относительно неизвестных u_3 . Все это и позволяет объяснить, почему переменные первой группы разбиты на три самостоятельных класса.

В-третьих, уравнения (3), (4) позволяют найти выражения переменных u_3, u_4 через переменные t, u_1, u_2 . Уравнения (3), (4) линейны относительно u_3 и u_4 . Впрочем, свойство линейности не является существенно необходимым для дальнейших рассуждений, однако оно имеет место в реальных уравнениях переходных процессов и несколько облегчит дальнейшие выкладки. Все отмеченные структурные особенности системы (1) – (4) присущи также уравнениям переходных процессов в ЭЭС, включающим уравнения Горева–Парка, и существенно влияют на построение алгоритмов расчета переходных процессов.

Одной из основных задач, связанных с системой (1) – (4), следует считать задачу нахождения решения, отвечающего начальному условию

$$u_1(t_0) = u_{10}, \quad u_2(t_0) = u_{20}. \quad (6)$$

Нетрудно видеть, что вопрос о существовании и единственности этого решения тесно связан с теорией обыкновенных дифференциальных

уравнений в нормальной форме Коши и теорией неявных функций. На основе известных положений этих теорий может быть получен и алгоритм для численного нахождения решения задачи (1) – (4), (6). Оказывается, что исходная задача может быть сведена к некоторой последовательности решения более простых в принципиальном отношении составляющих задач.

Первая задача. Найдем выражение переменных u_3 через переменные t, u_1 , для чего воспользуемся системой уравнений (3). Обозначим получающиеся выражения следующим образом:

$$u_3 = \mu(t, u_1). \quad (7)$$

Заметим, что однозначные выражения (7) существуют в каждой области переменных t, u_1 , в которой матрица $B(t, u_1)$ является невырожденной.

Вторая задача. Воспользовавшись равенствами (7) и (4), найдем выражение переменных u_4 через t, u_1, u_2 , которое мы обозначим так:

$$u_4 = \vartheta(t, u_1, u_2). \quad (8)$$

Для этого потребуется так же, как и в первой задаче, решить систему линейных уравнений (4) и предположить, что матрица D – невырожденная.

Третья задача. Найдем зависимость u_3' от переменных (5) u и t . Для этого воспользуемся способом нахождения производных от функции, заданных явно. Из (3) имеем

$$B(t, u_1)u_3' = b_t(t, u_1) - B_t(t, u_1)u_3, \quad (9)$$

где

$$b_t = \frac{\partial b}{\partial t} + \frac{\partial b}{\partial u_1} u_1'; \quad B_t = \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial u_1} u_1',$$

а индекс t обозначает полные производные, взятые согласно с уравнениями (1).

Следует отметить, что для решения этой задачи необходимо существование частных производных элементов матрицы $B(t, u_1)$ и вектор-функции $b(t, u_1)$ по каждому из переменных u_1 и t .

После того, как решены эти три задачи, возможно с помощью равенств (7), (8), (9) из уравнений (1), (2) исключить переменные u_3, u_4 . В результате этого придем к системе

$$\frac{du_1}{dt} = \bar{f}(t, u_1, u_2); \quad (10)$$

$$\bar{A}(t, u_1, u_2) \frac{du_2}{dt} = \bar{a}(t, u_1, u_2), \quad (11)$$

где черта означает результат проведенных подстановок.

Четвертая задача. При условии невырожденности матрицы $\bar{A}(t, u_1, u_2)$ приведем систему (10), (11) к нормальной форме Коши. Для этого потребуется в общем виде решить систему линейных уравнений (11) относительно u'_2 . В результате будем иметь некоторую систему дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши:

$$u'_1 = \bar{f}(t, u_1, u_2); \quad (12)$$

$$u'_2 = g(t, u_1, u_2), \quad (13)$$

где $g = \bar{A}^{-1}\bar{a}$, \bar{A}^{-1} – обратная матрица.

Пятая задача. Найдем решение системы (12), (13), отвечающее начальному условию (6), т.е. здесь мы имеем дело с классической задачей Коши.

В результате решения пятой задачи станут известными u_1 и u_2 , а формулы (7), (8) дадут искомую зависимость от переменного t вектор-функций u_3, u_4 . Таким образом, с формальной, чисто математической точки зрения исходная задача (1) – (4), (6) оказывается решенной, т.к. указана последовательность более элементарных составляющих задач, каждая из которых в отдельности известна из математического анализа.

Однако ясно, что лишь в исключительных случаях задача (1) – (4), (6) может быть решена без привлечения методов численного анализа и современных вычислительных средств. Как правило, элементы известных матриц и вектор-функций в системе (1) – (4) будут достаточно сложными для того, чтобы пытаться отыскивать решение в аналитическом виде. Поэтому встает вопрос о выборе алгоритма для численного решения исходной задачи.

Желательно использовать для этой цели сведение нашей задачи к указанной последовательности составляющих задач. Но на этом пути встают значительные трудности вычислительного характера. В самом деле, уже первую из этих задач практически решить невозможно, когда

число уравнений в системе (8) достаточно велико, если только матрица этой системы не обладает какой-либо специфической особенностью. Аналогичные затруднения имеют место и во второй, третьей и четвертой задачах. Тем не менее приемлемый вычислительный алгоритм может быть получен, если мы до некоторой степени откажемся от раздельного рассмотрения составляющих задач и учтем специфику их синтеза в исходной задаче (1) – (4), (6).

Чтобы численным методом интегрировать систему уравнений (12), (13) с начальным условием (6), совсем не обязательно знать явные выражения для правых частей, достаточно лишь уметь находить их числовые значения в некоторых немногих точках (t, u_1, u_2). Подставляя координаты этих точек в уравнения (3), получим системы линейных алгебраических уравнений, коэффициенты и свободные члены которых будут уже не функциями, а числами. Решение такой системы можно произвести при помощи одного из численных методов решения линейных уравнений. В результате будем иметь соответствующие числовые значения u_3 . После этого аналогичным образом могут быть найдены значения вектор-функции u_4 из системы (4) и значения u'_3 из (9). Теперь из (1) нетрудно найти числовые значения правых частей уравнений (12). А правые части уравнений (13) будут вычислены после подстановки значений переменных (5), t и значений u'_3 в правые части уравнений (2), после чего еще потребуется решить систему линейных алгебраических уравнений с числовыми коэффициентами.

Нетрудно видеть, что приведенный вычислительный процесс не требует, чтобы были в явном виде известны выражения (7), (8) и правые части уравнений (12), (13), а эффективность его во многом зависит от простоты коэффициентов исходной системы (1) – (4). Простота коэффициентов определяет и то, насколько сложными окажутся явные выражения для элементов матриц $b_t(t, u_1)$, $B_t(t, u_1)$, присутствующих в выражении (9). В указанном вычислительном процессе лишь при нахождении этих элементов требуется производить аналитические выкладки над коэффициентами системы. Как правило, коэффициенты имеют достаточно простой вид и вычислительные трудности при нахождении элементов матриц $b_t(t, u_1)$, $B_t(t, u_1)$ в аналитическом виде не идут ни в какое сравнение с трудностями решения в буквенном виде систем линейных алгебраических уравнений высокого порядка.

Возможен и другой путь нахождения решения системы (1) – (4), отвечающего начальному условию (6). Он основывается на замене в исходной системе уравнений алгебраических уравнений (3) уравнениями (9), полученными из (3) в результате дифференцирования.

При этом к начальным условиям (6) следует добавить условия

$$u_3(t_0) = u_{30}, \quad (14)$$

где числовые значения u_{30} могут быть найдены из системы линейных алгебраических уравнений

$$B(t_0, u_{10})u_3 = b(t_0, u_{10}). \quad (15)$$

Решение системы уравнений, полученной в результате указанной замены, с начальными условиями (6), (14) может быть разбито на ряд составляющих задач. Причем не потребуются разрешать систему линейных уравнений (3) в буквенном виде. Таким образом, когда порядок матрицы $B(t, u_1)$ достаточно высок, этот путь решения приводит к более экономному вычислительному процессу, т.к. на каждом шаге интегрирования требуется решать меньшее число систем алгебраических уравнений. Однако следует иметь в виду, что после замены алгебраических уравнений (3) дифференциальными уравнениями (9) может потребоваться более мелкий шаг интегрирования. Этот путь решения так же, как и рассмотренный выше, при сделанных предположениях относительно исходной системы (1) – (4) является строгим. Применительно к расчетам переходных процессов в электрических системах он рассматривался в работе [2]. Можно было бы произвести дифференцирование и связей (4). Однако при этом мы не получаем какого-либо выигрыша в вычислительном процессе: число систем нелинейных уравнений, которые требуется решать на каждом шаге интегрирования, от этого не изменится.

Задача расчета переходных процессов в ЭЭС по системам уравнений, включающих полные уравнения Горева–Парка, есть частный случай более общей задачи нахождения решения системы (1) – (4), отвечающего начальному условию (6). Это утверждение иллюстрируется в приложении.

Приложение

Система уравнений, которая описывает переходные процессы в системе из двух генераторов, работающих на шины бесконечной мощности, имеет вид

$$\left. \begin{aligned}
 u_{f\beta} \frac{r_{f\beta}}{X_{ad\beta}} &= i_{f\beta} r_{f\beta} + \frac{d\psi_{f\beta}}{dt} \frac{1}{100\pi}; \\
 0 &= i_{D\beta} r_{D\beta} + \frac{d\psi_{D\beta}}{dt} \frac{1}{100\pi}; \\
 0 &= i_{Q\beta} r_{Q\beta} + \frac{d\psi_{Q\beta}}{dt} \frac{1}{100\pi}; \\
 \frac{1}{100\pi} T_{J\beta} \frac{d\xi_{\beta}}{dt} &= m_{T\beta} - u_{d\Gamma\beta} i_{d\Gamma\beta} - u_{q\Gamma\beta} i_{q\Gamma\beta}; \\
 \frac{d\delta_{\beta}}{dt} &= \xi_{\beta}; \\
 u_{q\Gamma\beta} &= -i_{d\Gamma\beta} x_{ab\beta} - i_{D\beta} x_{ab\beta} + i_{f\beta} x_{ad\beta}; \\
 u_{d\Gamma\beta} &= i_{q\Gamma\beta} x_{q\beta} + i_{Q\beta} x_{ab\beta}; \\
 \psi_{D\beta} &= i_{D\beta} x_{D\beta} + i_{d\Gamma\beta} x_{ab\beta} - i_{f\beta} x_{ad\beta}; \\
 \psi_{Q\beta} &= i_{Q\beta} x_{Q\beta} + i_{q\Gamma\beta} x_{ab\beta}; \\
 \psi_{f\beta} &= i_{f\beta} x_{f\beta} - i_{d\Gamma\beta} x_{ab\beta} - i_{D\beta} x_{ad\beta}; \\
 u_{d\beta} &= u_{d\Gamma\beta} - i_{d\Gamma\beta} r_{T\beta} + i_{q\Gamma\beta} x_{T\beta}; \\
 u_{q\beta} &= u_{q\Gamma\beta} - i_{q\Gamma\beta} r_{T\beta} - i_{d\Gamma\beta} x_{T\beta}; \\
 u_{d\beta} &= -u_{q\Gamma\beta} x_{u\beta} + i_{q\beta} x_{u\beta} + i_{d\Gamma\beta} r_{u\beta} - i_{d\beta} r_{u\beta}; \\
 u_{q\beta} &= i_{d\Gamma\beta} x_{u\beta} - i_{d\beta} x_{u\beta} + i_{q\Gamma\beta} r_{u\beta} - i_{q\beta} r_{u\beta}; \\
 u_{d\beta} &= u_{d0} \cos \delta_{\beta} + u_{q0} \sin \delta_{\beta} + i_{d\beta} r_{\beta} - i_{q\beta} x_{\beta}; \\
 u_{q\beta} &= u_{d0} \cos \delta_{\beta} - u_{q0} \sin \delta_{\beta} + i_{q\beta} r_{\beta} + i_{d\beta} x_{\beta} \quad (\beta=1, 2).
 \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

$$\left. \begin{aligned}
 u_{d0} &= i_{d0} r_3 - i_{q0} x_3 + u_{cd}; \\
 u_{q0} &= i_{q0} r_3 + i_{d0} x_3 + u_{cq}; \\
 i_{d0} &= i_{d1} \cos \delta_1 - i_{q1} \sin \delta_1 + i_{d2} \cos \delta_2 - i_{q2} \sin \delta_2; \\
 i_{q0} &= i_{q1} \cos \delta_1 + i_{d1} \sin \delta_1 + i_{q2} \cos \delta_2 + i_{d2} \sin \delta_2.
 \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{d\eta_{1\beta}}{dt} &= \frac{1}{T_{p\beta} T_{\Delta n\beta}} \left[k_{\Delta u\beta} \Delta u_{\beta} - u_{b1\beta} - (T_{p\beta} + T_{\Delta u\beta}) \eta_{1\beta} \right]; & \frac{du_{b1\beta}}{dt} &= \eta_{1\beta}; \\
 \frac{d\eta_{2\beta}}{dt} &= \frac{1}{T_{p\beta} T_{u'\beta}} \left[k_{u'\beta} (\Delta u)'_{\beta} - u_{b2\beta} - (T_{p\beta} + T_{u'\beta}) \eta_{2\beta} \right]; & \frac{du_{b2\beta}}{dt} &= \eta_{2\beta}; \\
 \frac{d\eta_{3\beta}}{dt} &= \frac{1}{T_{p\beta} T_{\delta'\beta}} \left[k_{\delta'\beta} \delta'_{\beta} - u_{b3\beta} - (T_{p\beta} + T_{\delta'\beta}) \eta_{3\beta} \right]; & \frac{du_{b3\beta}}{dt} &= \eta_{3\beta}; \\
 \frac{d\eta_{4\beta}}{dt} &= \frac{1}{T_{p\beta} T_{\delta^*\beta}} \left[k_{\delta^*\beta} \delta^*_{\beta} - u_{b4\beta} - (T_{p\beta} + T_{\delta^*\beta}) \eta_{4\beta} \right]; & \frac{du_{b4\beta}}{dt} &= \eta_{4\beta}
 \end{aligned} \right\} \quad (III)$$

$(\beta=1, 2),$

где

$$u_{f\beta} = \begin{cases} u_{f\beta max}, & \text{если } u_{f\beta max} \leq \sum_{\mu=1}^4 u_{b\mu\beta}, \\ \sum_{\mu=1}^n u_{b\mu\beta}, & \text{если } u_{f\beta min} < \sum_{\mu=1}^4 u_{b\mu\beta} < u_{f\beta max}, \\ u_{f\beta min}, & \text{если } u_{f\beta min} \geq \sum_{\mu=1}^4 u_{b\mu\beta}, \end{cases}$$

$$\Delta u_{\beta} = \sqrt{u_{d\beta}^2 + u_{q\beta}^2} - u_{0\beta};$$

δ_{β}' и δ_{β}'' – первая и вторая производные от угла δ_{β} , $(\Delta u)_{\beta}'$ – производная по времени от $(\Delta u)_{\beta}$:

$$(\Delta u)_{\beta}' = \frac{u_{d\beta}' u_{d\beta} + u_{q\beta}' u_{q\beta}}{\sqrt{u_{d\beta}^2 + u_{q\beta}^2}}.$$

Система уравнений (I) описывает переходные процессы при $\beta = 1$ в первом генераторе, а при $\beta = 2$ во втором. Уравнения (III) – работу регуляторов сильного действия при $\beta = 1$ на первом генераторе, а при $\beta = 2$ на втором. Уравнения (II) дополняют системы (I) и (III) до совместной системы уравнений, число неизвестных которой равно числу уравнений.

Если в (I) переменная $u_{f\beta} = \text{const}$ ($\beta = 1, 2$), то системы уравнений (I), (II) описывают переходные процессы в электрической системе при условии постоянства возбуждения. Уравнения (III) при этом надо изъять из рассмотрения. Структура систем (I), (II) такова, что состоит из обыкновенных дифференциальных уравнений и алгебраических уравнений связи. Обозначим переменные

$$\Psi_{f\beta}, \Psi_{D\beta}, \Psi_{Q\beta}, \delta_{\beta}, \delta_{\beta}'', \quad (IV)$$

где $\beta = 1, 2$, вектором u_1 , а переменные

$$u_{q\Gamma\beta}, u_{d\Gamma\beta}, i_{q\Gamma\beta}, i_{d\Gamma\beta}, i_{Q\beta}, i_{D\beta}, i_{f\beta}, u_{d\beta}, u_{q\beta}, i_{q\beta}, i_{d\beta}, u_{d0}, u_{q0}, i_{d0}, i_{q0}, \quad (V)$$

где $\beta = 1, 2$, вектором u_4 .

Тогда, замечая, что уравнения связи линейны относительно переменных (5), убеждаемся в том, что система (I), (II) есть частный случай системы (1) – (4), при этом в (1) – (4) в последнюю явным образом не входят переменные u_2, u_3 .

При учете регуляторов сильного действия к переменным (IV), (V) добавляются переменные

$$\eta_{1\beta}, u_{b1\beta}, \eta_{2\beta}, u_{b2\beta}, \eta_{3\beta}, u_{b3\beta}, \eta_{4\beta}, u_{b4\beta} \quad (\beta = 1, 2), \quad (VI)$$

которые будем обозначать через u_2 . Т.к. в уравнения (III) наряду с производными переменных (VI) входят производные переменных (V), то, обозначая переменные (V) в этом случае через u_3 и сохраняя для переменных (IV) прежнее обозначение u_1 , убеждаемся, что опять имеем дело с частным случаем системы уравнений (1) – (4) (в неявном образом не входят переменные u_4).

Исследование динамической устойчивости в рассматриваемой системе «две станции – шины» приводит к задаче расчета переходных процессов по уравнениям (I) – (III). При

этом в начальный момент t_0 должны быть заданы значения переменных (IV) при условии постоянства возбуждения, а при учете регуляторов сильного действия, кроме того, должны быть еще заданы и начальные значения переменных (VI).

Таким образом, приведенный пример убеждает нас в целесообразности рассмотрения систем уравнений специального вида (1) – (4). Алгоритмы для решения задачи (1) – (4), (6) могут быть применены и для расчетов переходных процессов в электрических системах.

Была составлена программа для расчета переходных процессов в системе «две станции – шины» по уравнениям (I) – (III). В программе в качестве методов численного интегрирования использовались метод Рунге-Кутты, явный и неявный методы Адамса пятого порядка. При этом метод Рунге-Кутты предназначен лишь для расчета начального участка, а в дальнейшем интегрирование ведется при помощи методов Адамса, что позволяет сократить машинное время, необходимое на один шаг интегрирования.

Методы Адамса использовались следующим образом. Первое приближение значений решения в узле сетки определялось по явному методу, затем это приближение уточнялось по формулам неявного метода. Уточненное значение и принималось за результат шага интегрирования. В программе предусматривалась возможность интегрировать и без уточнений по формулам неявного метода. Однако было замечено, что при шаге $h = 0,06$ метод давал вскоре после начала интегрирования неудовлетворительные результаты, поэтому целесообразно производить комбинацию явного и неявного методов. Решение систем линейных уравнений на каждом шаге интегрирования в программе производится методом Гаусса.

Библиографический список

1. Цукерник Л.В. Приведение к нормальной форме уравнений возмущенного движения сложных энергосистем при расчетах устойчивости и электромеханических переходных процессов // Вопросы применения вычислительной техники в энергетических системах: Тр. Ин-та электротехники АН УССР. – Вып. 19. – Киев, 1962.
2. Веников В.А., Скрипник В.Ф., Цовьянов А.Н. Применение цифровых вычислительных машин для исследования переходных процессов в электрических системах // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1963. – № 4.

УДК 621.311.01

Способы построения консервативных моделей переходных электромеханических процессов в электроэнергетических системах

*М.Ш. Мисриханов, д-р техн. наук, Ю.В. Морошкин, канд. техн. наук,
А.Ю. Поздняков, инж.*

Методы исследования устойчивости установившихся режимов электроэнергетических систем с использованием функций Ляпунова в наибольшей степени разработаны применительно к консервативным матема-

тическим моделям. Одной из таких моделей является система уравнений электромеханических переходных процессов [1]

$$T_{ji} \ddot{\delta}_i = f_i(\delta_1, \dots, \delta_m) \quad (i = 1, \dots, m), \quad (1)$$

где функция f_i имеет выражение

$$f_i = P_i - E_i u_w G_{i,w} \sin(\delta_i - \alpha_{i,w}) - E_i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^m E_k G_{ik} \sin(\delta_i - \delta_k), \quad (2)$$

что соответствует случаю наличия в энергосистеме шин неизменного напряжения.

Здесь использованы следующие обозначения: δ_i – абсолютные углы между поперечными осями роторов генераторов и синхронной осью, E_i – модули ЭДС генераторов, T_{ji} – их постоянные инерции, m – общее число генераторов в системе, w – символ узла, где помещаются шины бесконечной мощности, u_w – модуль напряжения шин. Кроме того,

$$P_i = P_{Ti} - E_i^2 G_{ii} \sin \alpha_{ii}, \quad (3)$$

где P_{Ti} – мощность турбины.

Остальные обозначения в (2) и (3) имеют следующий смысл:

- электрическая сеть между узлами схемы 1, 2, ..., m является чисто реактивной и задается эквивалентными проводимостями обобщенных

ветвей $G_{ik} e^{-j\frac{\pi}{2}}$ при $i \neq k$ (j – мнимая единица), $G_{ik} = G_{ki}$,

- $G_{ii} e^{-j\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_{ii}\right)}$ – собственные проводимости.

Активные составляющие эквивалентных проводимостей согласно (2) имеют место в ветвях, примыкающих к узлу w , где помещаются шины бесконечной мощности, и согласно (3) в ветвях на землю. Переменными в (1), (2) являются

$$\delta_i \quad (i = 1, \dots, m),$$

величины

$$u_w, E_i, P_{Ti}, G_{ik}, G_{i,w}, \alpha_{ii}, \alpha_{i,w} \quad (i, k = 1, \dots, m) \quad (4)$$

считаются заданными постоянными, δ_w принято равным нулю: $\delta_w = 0$.

Параметры (4) консервативной модели (1), (2), (3) носят обобщенный характер [2]. Для практического использования этой модели необходимо указать способы оценки числовых значений параметров (4), исходя из общепотребительных математических моделей переходных электромеханических процессов, параметры которых определяются традиционным образом.

В качестве исходной модели переходных электромеханических процессов примем [3] систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{Ji} \ddot{\delta}_i = P_{Ti} - \operatorname{Re} \hat{E}_i (\dot{E}_i - \dot{u}_{n+i}) \dot{Y}_{i,i+n}; \quad (i = 1, \dots, m); \\ \dot{Y}_{n+i,n+i} \dot{u}_{n+i} - \sum_{\substack{k=m+1 \\ k \neq n+i}}^{n+m} \dot{Y}_{n+i,k} \dot{u}_k - \dot{Y}_{n+i,i} \dot{E}_i - \dot{Y}_{n+m+1,n+i} \dot{u}_{n+m+1} = \\ = \frac{P_{n+i}(u_{n+i}) - jQ_{n+i}(u_{n+i})}{\hat{u}_{n+i}} \quad (i = 1, \dots, m); \\ \dot{Y}_{ii} \dot{u}_i - \sum_{\substack{k=m+1 \\ k \neq i}}^{n+m} \dot{Y}_{ik} \dot{u}_k - Y_{i,n+m+1} \dot{u}_{n+m+1} = \frac{P_i(u_i) - jQ_i(u_i)}{\hat{u}_i} \quad (i = m+1, \dots, n), \end{array} \right. \quad (5)$$

где использованы обозначения: $1, \dots, m$ – номера дополнительных узлов ЭДС \dot{E}_i за сопротивлением генератора $1/\dot{Y}_{i,i+n}$; $m+1, \dots, n$ – номера негенераторных узлов; $n+1, \dots, n+m$ – номера генераторных узлов; $n+m+1$ – номер узла, где находятся шины бесконечной мощности; \dot{Y} – проводимости ветвей, причем первоначально не предполагается, что они чисто реактивные; \dot{u}_i – узловые напряжения; $P + jQ$ – нагрузки в узлах схемы; знак « $\hat{}$ » соответствует рассмотрению сопряженной комплексной величины. Предполагается, что нагрузки могут быть заданы в функции от модулей узловых напряжений.

Переменными в (5) служат

$$\delta_i \quad (i = 1, \dots, m), \quad \dot{u}_k \quad (k = m+1, \dots, n+m).$$

Предполагается, что система уравнений установившегося режима, которая получается из (5) приравниванием к нулю производных $\ddot{\delta}_i$ ($i = 1, \dots, m$), имеет решение

$$\delta_i = \delta_i^{(0)} \quad (i = 1, \dots, m); \quad \dot{u}_k = \dot{u}_k^{(0)} \quad (k = m + 1, \dots, n + m), \quad (6)$$

где $\delta_i^{(0)}$, $\dot{u}_k^{(0)}$ – константы.

При достаточно общих предположениях систему (5) в некоторой окрестности точки (6) можно представить в виде (1). Для этого надо систему уравнений, образуемую нелинейными уравнениями из (5), разрешить относительно \dot{u}_k :

$$\dot{u}_k = \dot{u}_k(\dot{E}_1, \dots, \dot{E}_m, \dot{u}_{n+m+1}) \quad (k = m + 1, \dots, m + n), \quad (7)$$

и функции (7) с индексами $k = n + 1, \dots, n + m$ подставить в дифференциальные уравнения, которые входят в систему (5). Однако получение в явном виде функций (7) невозможно.

По этой причине целесообразно указанную систему аппроксимировать некоторой линейной относительно функций (7) системой. Для этой цели воспользуемся приближенными формулами для представления нагрузок, заданных активной и реактивной мощностями, постоянными проводимостями

$$\dot{Y}_{k,k}^* \cong \frac{P_k(u_{k,ном}) - jQ_k(u_{k,ном})}{u_{k,ном}^2}, \quad (8)$$

где $u_{k,ном}$ – модуль номинального напряжения в узле k .

Анализ погрешности, получаемой при использовании формулы (8), дан в [4]. При выполнении условий

$$|\dot{Y}_{kk}^*| \gg |Y_{kk}^*|$$

погрешность будет незначительной.

В результате линейная система для приближенного нахождения функций (7) в матричном виде может быть записана в следующем виде:

$$\begin{cases} \tilde{Y}_{11}u^{(1)} - \tilde{Y}_{12}u^{(2)} = \tilde{Y}_E \tilde{E} + \tilde{Y}_1 \dot{u}_{n+m+1}, \\ -\tilde{Y}_{12}^T u^{(1)} + \tilde{Y}_{22}u^{(2)} = \tilde{Y}_2 \dot{u}_{n+m+1}, \end{cases} \quad (9)$$

здесь компонентами векторов $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ являются неизвестные напряжения генераторных \dot{u}_{n+i} ($i = 1, \dots, m$) и негенераторных \dot{u}_i

($i = m + 1, \dots, n$) узлов, компоненты вектора \tilde{E} – это ЭДС генераторов \dot{E}_i , модули которых заданы:

$$u^{(1)} = \begin{bmatrix} \dot{i}_{n+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{i}_{n+m} \end{bmatrix}; \quad u^{(2)} = \begin{bmatrix} \dot{i}_{m+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{i}_n \end{bmatrix}; \quad \tilde{E} = \begin{bmatrix} \dot{E}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{E}_m \end{bmatrix},$$

\dot{i}_{n+m+1} – заданное напряжение в узле, соответствующем шинам бесконечной мощности.

Матрицы \tilde{Y}_{11} , \tilde{Y}_{12} , \tilde{Y}_{22} , \tilde{Y}_E в (9) задаются формулами:

$$\tilde{Y}_{11} = \begin{bmatrix} \dot{Y}_{n+1,n+1} - \dot{Y}_{n+1,n+1}^* & \cdot & \cdot & \cdot & -\dot{Y}_{n+1,n+m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\dot{Y}_{n+m,n+1} & \cdot & \cdot & \cdot & \dot{Y}_{n+m,n+m} - \dot{Y}_{n+m,n+m}^* \end{bmatrix};$$

$$\tilde{Y}_{12} = \begin{bmatrix} \dot{Y}_{n+1,m+1} & \cdot & \cdot & \cdot & \dot{Y}_{n+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dot{Y}_{n+m,m+1} & \cdot & \cdot & \cdot & \dot{Y}_{n+m,n} \end{bmatrix};$$

$$\tilde{Y}_{22} = \begin{bmatrix} \dot{Y}_{m+1,m+1} - \dot{Y}_{m+1,m+1}^* & \cdot & \cdot & \cdot & -\dot{Y}_{m+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\dot{Y}_{n,m+1} & \cdot & \cdot & \cdot & \dot{Y}_{nn} - \dot{Y}_{nn}^* \end{bmatrix};$$

$$\tilde{Y}_E = \begin{bmatrix} \dot{Y}_{n+1,1} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \dot{Y}_{n+m,m} \end{bmatrix}.$$

Матрица \tilde{Y}_{11} характеризует связи между генераторными узлами, \tilde{Y}_{22} – между негенераторными, \tilde{Y}_{12} – связи между этими двумя группами узлов, \tilde{Y}_E – диагональная матрица, по главной диагонали находятся проводимости ветвей между генераторными и дополнительными узлами.

Индекс « T » в (9) означает операцию транспонирования матрицы. Компонентами векторов \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2 в (9) являются проводимости ветвей, соединяющих соответственно генераторные и негенераторные узлы с шинами бесконечной мощности:

$$\tilde{Y}_1 = \begin{bmatrix} \dot{Y}_{n+1, n+m+1} \\ \vdots \\ \dot{Y}_{n+m, n+m+1} \end{bmatrix}; \quad \tilde{Y}_2 = \begin{bmatrix} \dot{Y}_{m+1, n+m+1} \\ \vdots \\ \dot{Y}_{n, n+m+1} \end{bmatrix}.$$

Из системы (9) имеем следующие выражения для векторов $u^{(1)}, u^{(2)}$:

$$\begin{cases} u^{(1)} = \tilde{Z}_{11}\tilde{Y}_E\tilde{E} + [\tilde{Z}_{11}\tilde{Y}_1 + \tilde{Z}_{12}\tilde{Y}_2] \dot{u}_{n+m+1}, \\ u^{(2)} = \tilde{Z}_{12}^T\tilde{Y}_E\tilde{E} + [\tilde{Z}_{12}^T\tilde{Y}_1 + \tilde{Z}_{22}\tilde{Y}_2] \dot{u}_{n+m+1}, \end{cases} \quad (10)$$

где через $\tilde{Z}_{11}, \tilde{Z}_{12}, \tilde{Z}_{22}$ обозначены блоки симметричной матрицы:

$$Z = \begin{bmatrix} \tilde{Z}_{11} & \tilde{Z}_{12} \\ \tilde{Z}_{12}^T & \tilde{Z}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{Y}_{11} & -\tilde{Y}_{12} \\ -\tilde{Y}_{12}^T & \tilde{Y}_{22} \end{bmatrix}^{-1}, \quad (11)$$

ее симметричность является следствием симметричности матриц $\tilde{Y}_{11}, \tilde{Y}_{22}$.

Для получения системы вида (1), (2) компоненты вектора $u^{(1)}$ должны быть подставлены в первые m уравнений системы (5). Из выражения для $u^{(1)}$ в (10) следует

$$\dot{u}_{n+i} = \sum_{k=1}^m \dot{Z}_{n+i, n+k} \dot{Y}_{n+k, k} \dot{E}_k + \dot{A}_{n+i} \dot{u}_{n+m+1}, \quad (12)$$

где $\dot{Z}_{n+i, n+k}$ – элементы матрицы (11), а комплексное число

$$\dot{A}_{n+i} = A'_{n+i} + jA''_{n+i}$$

через параметры системы (5) выражается следующим образом:

$$\dot{A}_{n+i} = \left\{ \sum_{k=1}^m \dot{Z}_{n+i,n+k} \dot{Y}_{n+k,n+m+1} + \sum_{k=m+1}^n \dot{Z}_{n+i,k} \dot{Y}_{k,n+m+1} \right\}. \quad (13)$$

Подстановка (12) в правые части первых m уравнений системы (5) дает

$$\begin{aligned} & P_{Ti} - \operatorname{Re} \widehat{E}_i (\dot{E}_i - \dot{u}_{n+i}) \dot{Y}_{i,i+n} = \\ & = P_{Ti} - \operatorname{Re} \widehat{E}_i \left(\dot{E}_i - \sum_{k=1}^m \dot{Z}_{n+i,n+k} \dot{Y}_{n+k,k} \dot{E}_k - \dot{A}_{n+i} \dot{u}_{n+m+1} \right) \dot{Y}_{i,i+n} = \\ & = P_{Ti} - E_i^2 \operatorname{Re} (1 - \dot{Z}_{n+i,n+i} \dot{Y}_{n+i,i}) \dot{Y}_{i,i+n} + \\ & + \operatorname{Re} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^m (\dot{Z}_{n+i,n+k} \dot{Y}_{n+k,k} \dot{Y}_{i,n+i} \widehat{E}_i \dot{E}_k) + \operatorname{Re} \widehat{E}_i \dot{A}_{n+i} \dot{Y}_{i,i+n} \dot{u}_{n+m+1}. \end{aligned} \quad (14)$$

Тем самым в результате линеаризации нагрузок с использованием формулы (8) система (5) может быть приближенно представлена в виде (1), где правые части задаются формулами (14). Однако эта система не является консервативной. Она становится таковой, если согласно [5, 6] пренебречь активными составляющими в ветвях схемы между дополнительными, генераторными и негенераторными узлами. Наличие активных составляющих допустимо лишь в ветвях на землю, инцидентных шинам бесконечной мощности.

В результате этого упрощающего предположения элементы матриц \tilde{Y}_{11} , \tilde{Y}_{12} , \tilde{Y}_{22} , \tilde{Y}_E в (9) оказываются чисто мнимыми числами, так что

$$\begin{bmatrix} \tilde{Y}_{11} & -\tilde{Y}_{12} \\ -\tilde{Y}_{12}^T & \tilde{Y}_{22} \end{bmatrix} = I_n Y'' , \quad (15)$$

где $Y'' = \begin{bmatrix} \tilde{Y}_{11}'' & -\tilde{Y}_{12}'' \\ -\tilde{Y}_{21}'' & \tilde{Y}_{22}'' \end{bmatrix}$ – действительная матрица реактивных составляющих проводимостей схемы, составленной из генераторных и негенераторных узлов, I_n – диагональная матрица порядка n , по главной диагонали которой стоят мнимые единицы j . Аналогичным образом

$$\tilde{Y}_E = I_m Y_E'';$$

где

$$Y_E'' = \begin{bmatrix} Y_{n+1,1}'' & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & Y_{n+m,n}'' \end{bmatrix}.$$

С учетом формулы (15) обратная матрица (11) записывается в виде

$$Z = [I_n Y'']^{-1} = [Y'']^{-1} (-I_n),$$

т.е. ее элементы \dot{Z}_{ik} представляют собой произведение взятых с обратным знаком элементов $\tilde{Z}_{n+i,n+k}$ ($i, k = 1, \dots, m$) действительной матрицы $[Y'']^{-1}$, умноженных на мнимую единицу j .

Из этого следует, что в результате пренебрежения активными составляющими элементы перечисленных матриц, входящих в формулы (14), возможно записать в виде

$$\dot{Y}_{n+k,k} = jY_{n+k,k}''; \quad \dot{Y}_{i,n+i} = jY_{i,n+i}''; \quad \dot{Z}_{n+i,n+k} = j(-\tilde{Z}_{n+i,n+k}).$$

В силу этого и используя формулы для ЭДС генераторов

$$\dot{E}_i = E_i e^{j\delta_i} \quad (i = 1, \dots, m),$$

слагаемые под знаком суммы в (14) возможно представить в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \dot{Z}_{n+i,n+k} \dot{Y}_{n+k,k} \dot{Y}_{i,n+i} \dot{E}_i \dot{E}_k &= \operatorname{Re} j(-\tilde{Z}_{n+i,n+k}) jY_{n+k,k}'' jY_{i,n+i}'' e^{j(\delta_k - \delta_i)} = \\ &= -\operatorname{Re}(-\tilde{Z}_{n+i,n+k}) Y_{n+k,k}'' Y_{i,n+i}'' e^{j\left(\frac{\pi}{2} + \delta_k - \delta_i\right)} E_i E_k = \\ &= -(-\tilde{Z}_{n+i,n+k}) Y_{n+k,k}'' Y_{i,n+i}'' \cos\left(\frac{\pi}{2} + \delta_k - \delta_i\right) E_i E_k = \\ &= (-\tilde{Z}_{n+i,n+k}) Y_{n+k,k}'' Y_{i,n+i}'' [\sin(\delta_k - \delta_i)] E_i E_k = -E_i E_k G_{ik} \sin(\delta_i - \delta_k), \end{aligned}$$

где введено обозначение

$$G_{ik} = -\tilde{Z}_{n+i,n+k} Y_{n+k,k}'' Y_{i,n+i}'' \quad (16)$$

Переходим к подробному рассмотрению в формуле (14) слагаемого

$$\operatorname{Re} \widehat{E}_i \dot{u}_{n+m+1} \dot{A}_{n+i} \dot{Y}_{i,i+n}.$$

Посредством обозначений

$$\dot{G}_{i,w} = \dot{A}_{n+i} \dot{Y}_{i,i+n} = G_{i,w} e^{j\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_{i,w}\right)}; \quad w = n + m + 1$$

это слагаемое при условии совмещения направления вектора напряжения балансирующего узла с синхронной осью ($\dot{u}_w = u_w$) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \widehat{E}_i \dot{u}_{n+m+1} \dot{A}_{n+i} \dot{Y}_{i,i+n} &= \operatorname{Re} \widehat{E}_i \dot{u}_w \dot{G}_{i,w} = \\ &= \operatorname{Re} E_i u_w G_{i,w} e^{j\left(\alpha_{iw} + \frac{\pi}{2}\right)} e^{-j\delta_i} = \operatorname{Re} E_i u_w G_{i,w} e^{j\left(\alpha_{iw} - \delta_i + \frac{\pi}{2}\right)} = \\ &= E_i u_w G_{i,w} \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\delta_i - \alpha_{iw})\right] = E_i u_w G_{i,w} \sin(\delta_i - \alpha_{iw}), \end{aligned}$$

где при условии пренебрежения активными составляющими проводимостей в \tilde{Y}_E

$$G_{i,w} = |\dot{A}_{n+i}| Y_{i,i+n}''; \quad \alpha_{i,w} = \arg \dot{A}_{n+i}, \quad (17)$$

комплексное число \dot{A}_{n+i} определяется с учетом (13) формулой

$$\dot{A}_{n+i} = \sum_{k=1}^m j Z_{n+i,n+k} \dot{Y}_{n+k,n+m+1} + \sum_{k=m+1}^n j Z_{n+i,k} \dot{Y}_{k,n+m+1}.$$

Наконец, вводим еще одно обозначение:

$$\operatorname{Re}(1 - \dot{Z}_{n+i,n+i} \dot{Y}_{n+i,i}) \dot{Y}_{i,i+n} = G_{ii} \sin \alpha_{ii},$$

где G_{ii} и α_{ii} – действительные величины, характеризующие проводимости ветвей на землю в эквивалентной схеме, соответствующей математической модели (1), (2), (3). Одна из этих величин может быть задана произвольным образом. В силу пренебрежения активными составляющими проводимостей в \tilde{Y}_E и ветвях части схемы, включающей только генераторные и негенераторные узлы, имеем

$$G_{ii} \sin \alpha_{ii} = \operatorname{Re} j(1 - jZ_{n+i, n+i} jY''_{n+i, i})Y''_{i, i+n} = 0. \quad (18)$$

В результате введенных обозначений систему (14) становится возможным записать в виде (1), (2), (3), где параметры

$$G_{ik}, G_{i,w}, \alpha_{i,w}, G_{ii} \sin \alpha_i = 0$$

определяются соответственно формулами (16), (17), (18). При этом в силу (18) получается математическая модель, в которой собственные проводимости являются чисто реактивными и равными с противоположным знаком сумме проводимостей ветвей, инцидентных данному узлу. При этом проводимости ветвей на землю равны нулю. Таким образом, при использовании двух указанных упрощающих предположений от исходной системы (5) осуществляется переход к консервативной модели

$$T_{ji} \ddot{\delta}_i = P_{Ti} - E_i u_w G_{i,w} \sin(\delta_i - \alpha_{i,w}) - E_i \sum_{k=1, k \neq i}^m E_k G_{ik} \sin(\delta_i - \delta_k), \quad (19)$$

параметры $G_{i,w} \alpha_{i,w}$ ($i = 1, \dots, m$), G_{ik} ($i, k = 1, \dots, m; i \neq k$) которой определяются через параметры системы (5) с помощью формул (16), (17).

Еще раз отметим, что система (19) – это частный случай системы (1), (2). В (1), (2) в отличие от (19) возможно задавать отличными от нуля проводимости обобщенных ветвей на землю.

Поскольку система (19) не эквивалентна исходной системе (5), а лишь аппроксимирует ее, то первые m координат

$$\delta_i = \delta_{i0} \quad (i = 1, \dots, m) \quad (20)$$

стационарной точки (6) системы (5) не являются, вообще говоря, стационарной точкой системы (19). Целесообразно сформировать систему (1), (2) таким образом, чтобы точка (20) оказалась стационарной для (1), (2). Осуществить это можно следующим образом [7, 8].

Поскольку аргументами функций (7), как и (10), являются исключительно переменные δ_i ($i = 1, \dots, m$), то эквивалентную (5) систему (1) возможно представить в виде

$$T_{ji} \ddot{\delta}_i = P_{Ti} - E_i u_w G_{i,w} \sin(\delta_i - \alpha_{i,w}) - E_i \sum_{k=1, k \neq i}^m E_k G_{ik} \sin(\delta_i - \delta_k) + \psi_i(\delta_1, \dots, \delta_n), \quad (21)$$

где $i = 1, \dots, m$, а выражения функций $\psi_i (i = 1, \dots, m)$ в явном виде, как уже указывалось, найти невозможно. Но в силу того, что система (21) эквивалентна (5), точка (20) является для нее стационарной. На этом основании значения ψ_{i0} функций ψ_i в стационарной точке (20) определяются формулами

$$\psi_{i0} = - \left[P_{Ti} - E_i u_w G_{i,w} \sin(\delta_{i0} - \alpha_{i,w}) - \right. \\ \left. - E_i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^m E_k G_{ik} \sin(\delta_{i0} - \delta_{k0}) \right]. \quad (22)$$

Предполагая, что значения функций ψ_i в процессе движения остаются близкими их значениям ψ_{i0} в стационарной точке (20), в силу (21), (22) приходим к еще одному приближенному представлению системы (5):

$$T_{ji} \ddot{\delta}_i = P_{Ti} - E_i u_w G_{i,w} \sin(\delta_i - \alpha_{i,w}) - E_i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^m E_k G_{ik} \sin(\delta_i - \delta_k) + \psi_{i0}; \quad (23)$$

система (23) является консервативной, и в число ее стационарных точек входит точка (20).

По сравнению с (19) в системе (23) присутствуют постоянные ψ_{i0} . Эти постоянные можно представить следующим образом:

$$\psi_{i0} = -E_i^2 G_{ii} \sin \alpha_{ii},$$

где G_{ii} и α_{ii} – некоторые константы, которые возможно определить.

Действительно, рассмотрим систему из m уравнений

$$-E_i^2 G_{ii} \sin \alpha_{ii} = \psi_{i0}, \quad (i = 1, \dots, m) \quad (24)$$

относительно $2m$ неизвестных: G_{ii} , α_{ii} . Эта система всегда разрешима: достаточно принять G_{ii} такими, чтобы они все удовлетворяли неравенствам $|G_{ii}| \geq \psi_{i0} / E_i^2$.

В начале статьи величины G_{ii} , $\sin \alpha_{ii}$ интерпретировались как параметры ветвей на землю схемы замещения, которой соответствует система уравнений переходных электромеханических процессов (1), (2), (3).

Таким образом, исходную систему (5) можно приближенно заменить либо консервативной системой (1), (2), (3), либо консервативной системой (19). В первом случае в схеме замещения присутствуют ветви на землю, во втором – таких ветвей нет. Следствием этого является наличие стационарной точки (20) у системы (1), (2), (3), координаты которой в точности совпадают с первыми m координатами стационарной точки (6) исходной системы (5).

Система уравнений (1) – (3) в настоящее время наиболее предпочтительна для практического внедрения метода функций Ляпунова в алгоритмы расчетов устойчивости электроэнергетических систем, поскольку для систем такого типа известны имеющие практическое значение методы поиска неустойчивых стационарных точек.

Выше была рассмотрена математическая модель переходных электромеханических процессов при наличии в электроэнергетической системе шин бесконечной мощности. Аналогичный подход может использоваться в случае систем станций соизмеримой мощности. При отсутствии шин в левых частях системы нелинейных уравнений (5) отсутствуют члены вида $\dot{Y}_{i,n+m+1} \dot{u}_{n+m+1}, \dot{Y}_{i,n+m+1,n+i} \dot{u}_{n+m+1}$. Но, по-прежнему, предполагается разрешимость этой системы и возможность представления решений в виде (7). Только теперь надо иметь в виду, что установившимся режимам соответствуют решения специального вида [3], а не стационарные точки.

Библиографический список

1. **Вайман М.Я.** Устойчивость нелинейных механических и электромеханических систем. – М.: Машиностроение, 1981. – 126 с.
2. **Гераскин О.Т.** Обобщенные параметры электрических сетей. – М.: Энергия, 1977. – 112 с.
3. **Морошкин Ю.В., Поздняков А.Ю.** Расчет стационарного режима без введения балансирующего узла // Проектирование и эксплуатация энергетических систем и электрических сетей: Тр. Института Энергосетьпроект. – М.: Энергия, 1978. – Вып. 11. – С. 116–128.
4. **Морошкин Ю.В., Поздняков А.Ю., Соколов С.Г.** О сходимости методов расчета установившихся режимов при некоторых способах линеаризации уравнений узловых напряжений // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1978. – №4. – С. 14–22.
5. **Расчеты** квазиустановившихся режимов электрических систем и анализ их устойчивости / Л.А. Жуков, А.Н. Цовьянов, Ю.В. Морошкин, А.Ю. Поздняков // Современные проблемы энергетики и электротехники: Тез. докл. Всесоюз. науч. конф. – М.: МЭИ, 1977.

6. **Андреюк В.А., Сказыбаева Н.С.** Методы построения консервативной модели энергосистемы для анализа режимов и устойчивости // Изв. РАН. Энергетика. – 1977. – №5. – С. 107–110.

7. **Морошкин Ю.В.** Методы малого параметра применительно к построению позиционных и консервативных моделей электрических систем // Применение метода функций Ляпунова в энергетике. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1975. – С. 96–99.

8. **Морошкин Ю.В.** Функции Ляпунова для математических моделей электрических систем при расчете нагрузок статическими характеристиками и учете переходных процессов в контурах ротора // Электричество. – 1977. – № 10. – С. 13–19.

УДК 621.311

Метод согласованного выбора генерирующих и нагрузочных мощностей в консервативных электроэнергетических системах в целях обеспечения баланса мощности

М.Ш. Мисриханов, д-р техн. наук, Ю.В. Морошкин, канд. техн. наук

В работах [1 – 6] рассматривались преимущественно установившиеся режимы при отсутствии баланса мощности в консервативных электроэнергетических системах (ЭЭС). Вполне естественно в процессе управления ЭЭС заменять такие режимы режимами, в которых соблюдается баланс активной мощности.

При обеспечении баланса необходимо учитывать допустимые пределы изменения мощностей станций и нагрузок в целях максимального покрытия каждой из нагрузок.

В математической модели [1] разность $P_i = P_{Ti} - E_i^2 Y_{ij} \sin \alpha_{ij}$ представляет собой разность генераторной и нагрузочной мощностей $P_{Hi} = E_i^2 Y_{ij} \sin \alpha_{ij}$. Баланс мощности в системе записывается в виде

$$\sum_{i=1}^n P_{Ti} - \sum_{i=1}^n P_{Hi} = 0, \quad (1)$$

где каждая из величин P_{Ti} , P_{Hi} имеет свои пределы изменения:

$$P_{Ti}^{(1)} \leq P_{Ti} \leq P_{Ti}^{(2)}; \quad P_{Hi}^{(1)} \leq P_{Hi} \leq P_{Hi}^{(2)} \quad (i = 1, \dots, n), \quad (2)$$

числа $P_{Ti}^{(1)}$, $P_{Hi}^{(1)}$ являются неотрицательными, а $P_{Ti}^{(2)}$, $P_{Hi}^{(2)}$ – положительными, причем $P_{Ti}^{(1)} \leq P_{Ti}^{(2)}$; $P_{Hi}^{(1)} \leq P_{Hi}^{(2)}$.

Рассмотрим два взаимоисключающих случая. Первый из них

$$\sum_{i=1}^n P_{Hi}^{(1)} \leq \sum_{i=1}^n P_{Ti}^{(2)} < \sum_{i=1}^n P_{Hi}^{(2)}, \quad (3)$$

когда система дефицитна и генерирующей мощности недостаточно для покрытия суммарной нагрузки, если каждая из нагрузок принимается равной своей верхней границе. В этом случае все генераторы должны работать по максимуму и условие баланса активной мощности (1) принимает вид

$$\sum_{i=1}^n P_{Hi} - \sum_{i=1}^n P_{Ti}^{(2)} = 0. \quad (4)$$

Цель, которая преследуется при балансировании режима в случае выполнения неравенства (3), – это выбор для каждой нагрузки такого значения, которое было бы по возможности ближе к своему наибольшему граничному значению $P_{Hi}^{(2)}$. Тогда в качестве целевой функции можно принять функцию

$$F_1(P_{H1}, \dots, P_{Hn}) = \sum_{i=1}^n (P_{Hi} - P_{Hi}^{(2)})^2$$

переменных

$$P_{H1}, \dots, P_{Hn}, \quad (5)$$

которая является выпуклой, поскольку её матрица Гесса с элементами из вторых производных $\left[\frac{\partial^2 F}{\partial P_{Hi} \partial P_{Hk}} \right]$ ($i, k = 1, \dots, n$) представляет собой диагональную матрицу с числом 2 по главной диагонали.

В результате имеет место задача математического программирования с целевой функцией

$$F_1(P_{H1}, \dots, P_{Hn}) \rightarrow \min \quad (6)$$

при условии (4) в виде равенства, где $\sum_{i=1}^n P_{Ti}^{(2)} = A = \text{const}$, т.е.

$$\sum_{i=1}^n P_{Hi} = A, \quad (7)$$

и следующих из (2) условиях в виде неравенств

$$P_{Hi}^{(1)} \leq P_{Hi} \leq P_{Hi}^{(2)} \quad (i = 1, \dots, n), \quad (8)$$

определяющих в пространстве переменных (5) n -мерный параллелепипед. Условия (7) и (8) определяют выпуклое множество в пространстве переменных (5). По этой причине и по причине того, что функция (6) также является выпуклой, задача (6) – (8) относится к классу задач выпуклого программирования.

Если вместо (3) имеет место противоположное условие

$$\sum_{i=1}^n P_{Ti}^{(2)} \geq \sum_{i=1}^n P_{Hi}^{(2)}, \quad (9)$$

то суммарная нагрузка во всех случаях оказывается покрытой. Одна из целей, которая может преследоваться при выборе режима работы генераторов, связана с достижением возможно меньшей загрузки каждого генератора. При этом естественным образом вводится в рассмотрение целевая функция

$$F_2(P_{T1}, \dots, P_{Tn}) = \sum_{i=1}^n (P_{Ti} - P_{Ti}^{(1)})^2 \rightarrow \min \quad (10)$$

при вытекающем из (1) условии в виде равенства

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n P_{Ti} &= B, \\ B &= \sum_{i=1}^n P_{Hi}^{(2)} = \text{const}, \end{aligned} \quad (11)$$

и при условии в виде неравенств

$$P_{Ti}^{(1)} \leq P_{Ti} \leq P_{Ti}^{(2)} \quad (i = 1, \dots, n), \quad (12)$$

которые имеют место согласно (2).

Таким образом, при выполнении неравенства (9), свидетельствующего об отсутствии дефицита мощности в системе, имеет место задача выпуклого программирования (10) – (12) по подбору P_{Ti} в целях по возможности меньшей загрузки генераторов.

Методы решения задач выпуклого программирования базируются на использовании условий Куна–Таккера, с помощью которых определяются точки, являющиеся возможными решениями задачи, и осуществляется их проверка на экстремум.

Применительно к задаче (6) – (8) условия Куна–Таккера получаются следующим образом. Во-первых, условия в виде неравенств (8) переписываются в следующей форме:

$$-P_{Hi} + P_{Hi}^{(1)} \leq 0; \quad P_{Hi} - P_{Hi}^{(2)} \leq 0 \quad (i = 1, \dots, n), \quad (13)$$

при этом в правой части неравенств находится нуль. Подчеркнём специально это обстоятельство, поскольку именно в форме (13) неравенства (8) участвуют в формировании функции Лагранжа. Во-вторых, каждому из условий (7), (13) ставится в соответствие так называемый множитель Лагранжа. Применительно к условию в виде равенства (7) этот множитель обозначим через μ . Первому из n неравенств (13) с номером i ставим в соответствие множитель λ_{2i-1} , второму – множитель λ_{2i} ($i = 1, \dots, n$). Тем самым установлена сквозная нумерация неравенств (13). Составляется функция Лагранжа:

$$L_1 = F_1 + \sum_{i=1}^n \lambda_{2i-1} (-P_{Hi} + P_{Hi}^{(1)}) + \sum_{i=1}^n \lambda_{2i} (P_{Hi} - P_{Hi}^{(2)}) + \mu \left(\sum_{i=1}^n P_{Hi} - A \right). \quad (14)$$

Отметим, что множители при λ_{2i-1} и λ_{2i} в функции Лагранжа совпадают с левыми частями (13).

В-третьих, каждой паре неравенств (13) ставим в соответствие пару уравнений

$$\lambda_{2i-1} (-P_{Hi} + P_{Hi}^{(1)}) = 0; \quad \lambda_{2i} (P_{Hi} - P_{Hi}^{(2)}) = 0 \quad (i = 1, \dots, n), \quad (15)$$

которые носят название уравнений дополняющей нежёсткости.

Условия Куна–Таккера представляют собою совокупность некоторых уравнений и неравенств. Уравнения, входящие в эти условия, образуются двумя путями. Первый из них – это приравнивание к нулю частных производных от функции (14) по переменным (5) и параметру μ , соотносённому с ограничивающим условием в виде равенства (7). Число таких уравнений равно $n+1$: n переменных (5) и одно условие в виде равенства (7).

Кроме того, в условия Куна–Таккера включается $2n$ уравнений дополняющей нежёсткости (15) и неравенства (13).

И наконец, в качестве условий используются неравенства

$$\lambda_{2i-1} \geq 0, \quad \lambda_{2i} \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (16)$$

Отметим, что выполнения подобного неравенства не требуется относительно множителя Лагранжа μ , соотносённого с условием в виде равенства (7). Выполнение условий в задачах выпуклого программирования наряду с другими условиями Куна–Таккера означает, что соответствующая точка является единственной точкой минимума функции (10) при условиях (7) и (8).

Приведём выражения частных производных функции Лагранжа, задаваемой формулой (14), по переменным (5) и параметру μ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_1}{\partial P_{Hi}} &= 2(P_{Hi} - P_{Hi}^{(2)}) - \lambda_{2i-1} + \lambda_{2i} + \mu \quad (i = 1, \dots, n); \\ \frac{\partial L_1}{\partial \mu} &= \sum_{i=1}^n P_{Hi} - A. \end{aligned} \quad (17)$$

С учётом (13) – (17) условия Куна–Таккера для задачи (6) – (8) записываются в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} 2(P_{Hi} - P_{Hi}^{(2)}) - \lambda_{2i-1} + \lambda_{2i} + \mu = 0; \\ -P_{Hi} + P_{Hi}^{(1)} \leq 0; \quad P_{Hi} - P_{Hi}^{(2)} \leq 0; \\ \lambda_{2i-1}(-P_{Hi} + P_{Hi}^{(1)}) = 0; \quad \lambda_{2i}(P_{Hi} - P_{Hi}^{(2)}) = 0; \\ \lambda_{2i-1} \geq 0; \quad \lambda_{2i} \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad \sum_{i=1}^n P_{Hi} = A. \end{array} \right. \quad (18)$$

Резюмируя все вышесказанное, констатируем, что задача (6) – (8) относится к классу задач выпуклого программирования, более точно к классу сепарабельного программирования, поскольку все фигурирующие в этой задаче функции являются суммами функций, каждая из которых зависит только от одной переменной. Например, функция F_1 представляет собой сумму слагаемых $(P_{Hi} - P_{Hi}^{(2)})^2$, левая часть (4) состоит из слагаемых $P_{Hi} (i = 1, \dots, n)$.

Алгоритм решения задачи (6) – (8) строится с учетом того, что искомое решение может находиться либо внутри допустимой области изменения переменных (5), которая представляет собой пересечение гиперплоскости (7) с n – мерным параллелепипедом (8); либо на отдельных участках границы этой области, образованных пересечением граней параллелепипеда (8), число которых k не превышает $n - 1$, $k \leq n - 1$. При $k = n$ поиск решения осуществляется в вершинах (угловых точках) параллелепипеда (8).

Для отыскания экстремальной точки внутри допустимой области достаточно рассмотреть задачу с той же самой целевой функцией (6), но в качестве условий тогда используется только уравнение (7). Решение такой задачи производится с применением классического метода Лагранжа. Функция Лагранжа имеет вид

$$\alpha = F_1(P_{H1}, \dots, P_{Hn}) + \mu \left(\sum_{i=1}^n P_{Hi} - A \right),$$

где μ – множитель Лагранжа.

Дифференцируя L по $P_{Hi} (i = 1, \dots, n)$ и по μ , получаем уравнения

$$\begin{cases} 2(P_{Hi} - P_{Hi}^{(2)}) + \mu = 0 & (i = 1, \dots, n); \\ \sum_{i=1}^n P_{Hi} = A \end{cases} \quad (19)$$

относительно координат искомой экстремальной точки множителя μ . При условии, что координаты точки находятся внутри допустимой области и в ней достигается минимум целевой функции, она принимается в качестве решения исходной задачи (6) – (8).

Отметим, что к системе (19) приходим, полагая в условиях Куна–Таккера (18) все $\lambda_{2i-1}, \lambda_{2i}$ ($i = 1, \dots, k$) равными нулю:

$$\lambda_{2i-1} = \lambda_{2i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (20)$$

Таким образом, наличие внутри допустимой области решения у системы (19) и выполнение условия (20) характеризуют наличие точки условного минимума в исходной задаче (6) – (8).

Если же решение задачи (19) лежит вне допустимой области, то поиск решения задачи (6) – (8) продолжается на участках границы пересечения областей (7), (8). Грани параллелепипеда (8), число которых равно $2n$, имеют уравнения

$$P_{Hi} = P_{Hi}^{(1)}; \quad P_{Hi} = P_{Hi}^{(2)} \quad (i = 1, \dots, n). \quad (21)$$

В приведенном пересечении граней они сгруппированы парами: грань с наименьшим возможным значением $P_{Hi}^{(1)}$ переменной P_{Hi} и противоположная ей грань с наибольшим возможным значением $P_{Hi}^{(2)}$ той же переменной.

При выделении некоторого участка границы требуется указывать какое-то количество m граней, пересечение которых с гиперплоскостью (7) задает этот участок границы. Покажем, что число m не может превышать числа n .

Действительно, если к любому множеству из n граней добавить еще одну грань, то множество из $n + 1$ граней будет обязательно включать хотя бы одну пару противоположных граней, пересечение которых является пустым множеством. Следовательно, пустым будет пересечение и любых $n + 1$ граней n -мерного параллелепипеда (8).

Тем не менее можно указать n граней параллелепипеда, пересечение которых непусто. В качестве примеров можно указать подмножество M_1 множества (21), состоящее из n граней $P_{Hi} = P_{Hi}^{(1)}$ ($i = 1, \dots, n$), или же множество M_2 граней $P_{Hi} = P_{Hi}^{(2)}$ ($i = 1, \dots, n$). Грани множества M_1 пересекаются в угловой точке $(P_{H1}^{(1)}, \dots, P_{Hn}^{(1)})$, а множества M_2 в точке $(P_{H1}^{(2)}, \dots, P_{Hn}^{(2)})$.

Другие варианты пересекающихся множеств из n граней образуются следующим образом. Какие-либо S элементов множества M_1 замещаются на элементы с теми же номерами из M_2 . Получающиеся при

этом множества из n граней пересекаются в угловых точках $n - m$ -мерного параллелепипеда.

При решении задачи (6) – (8) требуется рассматривать такие непустые пересечения меньшего, чем n , числа граней параллелепипеда (8). Такие множества граней, содержащих по m ($m \leq n$) элементов, можно образовывать из подмножеств M_1 и M_2 следующим образом. Выбираем k ($k \leq m$) граней из множества M_1 и $m - k$ граней из M_2 , при этом номера выбранных из M_1 граней не должны совпадать ни с одним номером грани, выбранным из M_2 . Грани из множества M_1 можно выбрать C_n^k способами, а из множества M_2 – числом способов C_{n-k}^{m-k} . Таким образом, m граней с непустым пересечением можно выбрать

$$N(n, m) = C_n^0 C_n^k + C_n^1 C_{n-1}^{k-1} + C_n^2 C_{n-2}^{k-2} + \dots + C_n^{k-1} C_{n-k+1}^1 + C_n^k C_{n-k}^0 \quad (22)$$

числом способов.

До сих пор не использовалась какая-либо сквозная нумерация граней n -мерного параллелепипеда. Для сделанных выше выводов требовалось только знать, что множество граней (21) представляет собой прямую сумму множеств M_1 и M_2 , каждое из которых включает по n граней. При этом индексу i координатной оси ($i = 1, \dots, n$) отвечает пара противоположных граней $P_{Hi} = P_{Hi}^{(1)}$, $P_{Hi} = P_{Hi}^{(2)}$ n -мерного параллелепипеда.

Теперь для граней (21) воспользуемся нумерацией, которая принята при перечислении множителей Лагранжа λ_{2i-1} , λ_{2i} ($i = 1, \dots, n$) при составлении функции Лагранжа (14). Тогда грань $P_{Hi} = P_{Hi}^{(1)}$ имеет номер $2i - 1$, а грани $P_{Hi} = P_{Hi}^{(2)}$ присвоен номер $2i$. Множество всех номеров граней (21) при этом обозначим через I :

$$I = \{1, 2, \dots, 2_{n-1}, 2_n\}. \quad (23)$$

С точки зрения формирования множеств по m пересекающимся граням представляют интерес подмножества I вида:

$$I_j(m) = \{n_1^{(j)}, \dots, n_m^{(j)}\}, \quad (24)$$

где среди индексов $n_1^{(j)}, \dots, n_m^{(j)}$ не могут одновременно присутствовать числа $2i - 1$ и $2i$ ($i = 1, \dots, n$), поскольку в принятой сквозной нумерации они соответствуют противоположным граням. В множество (21) либо включается одно число m пары $2i - 1, 2i$, либо не включается ни одного.

Для формирования подмножества (24) образуем два подмножества M'_1 и M'_2 индексов граней, включенных во множества M_1 и M_2 . И затем осуществим выбор индексов из M'_1 и M'_2 по аналогии с тем, как это делалось при выборе m пересекающихся граней из M_1 и M_2 . При этом становится очевидным, что индекс j в (24) может принимать значения в пределах от нуля до $\underline{N}(n, m)$, где $N(n, m)$ определяется по формуле (22):

$$0 \leq j \leq N(n, m). \quad (25)$$

Укажем еще один алгоритм образования подмножества (24). Пусть номера

$$n_1^{(j)}, \dots, n_k^{(j)}, \quad (26)$$

где $k < m$, уже включены в $I_j(m)$, и тем самым среди граней параллелепипеда с номерами по (26) нет противоположных пар. Тогда в качестве номера $n_{k+1}^{(j)}$ можно принять номер любой грани, номер который не совпадает ни с одним из чисел (26) и которая не является противоположной ни одной из граней с теми же номерами (26).

При $k = n$ в (24) добавление к индексам (24) еще одного из множества (22) невозможно, поскольку, как уже отмечалось ранее, множество из $n + 1$ граней наверняка содержит хотя бы одну пару противоположных граней.

Наряду с (24) в рассмотрение вводится множество $\tilde{I}_j(2n - m)$ номеров граней \bar{n} -мерного параллелепипеда, не включенных во множество (24), общее количество таких граней равно $2n - m$. Очевидно, что множество $\tilde{I}_j(2n - m)$ является дополнением множества $I_j(m)$ до множества (23).

С учетом разбиения множества (23) на два подмножества $I_j(m)$ и $\tilde{I}_j(2n - m)$ условия Куна–Таккера (18) можно переписать в виде

$$\left\{ \begin{array}{l}
 2 \left(P_{Hi} - P_{Hi}^{(2)} \right) - \lambda_{2i-1} + \lambda_{2i} + \mu = 0; \\
 -\lambda_{2i-1} \left(-P_{Hi} + P_{Hi}^{(1)} \right) = 0; \quad \lambda_{2i} \left(P_{Hi} - P_{Hi}^{(2)} \right) = 0; \\
 \left(2i - 1 \in \tilde{I}_j(2n - m); \quad 2i \in \tilde{I}_j(2n - m) \right); \\
 2 \left(P_{Hi} - P_{Hi}^{(2)} \right) - \lambda_{2i-1} + \lambda_{2i} + \mu = 0; \\
 \lambda_{2i-1} \left(-P_{Hi} + P_{Hi}^{(1)} \right) = 0; \quad \lambda_{2i} \left(P_{Hi} - P_{Hi}^{(2)} \right) = 0; \\
 \left(2i - 1 \in \tilde{I}_j(2n - m); \quad 2i \in I_j(m) \right); \\
 2 \left(P_{Hi} - P_{Hi}^{(2)} \right) - \lambda_{2i-1} + \lambda_{2i} + \mu = 0; \\
 \lambda_{2i-1} \left(-P_{Hi} + P_{Hi}^{(1)} \right) = 0; \quad \lambda_{2i} \left(P_{Hi} - P_{Hi}^{(2)} \right) = 0; \\
 \left(2i - 1 \in I_j(m); \quad 2i \in \tilde{I}_j(2n - m) \right); \\
 -P_{Hi} + P_{Hi}^{(1)} \leq 0; \quad P_{Hi} - P_{Hi}^{(2)} \leq 0; \\
 \lambda_{2i-1} \geq 0; \quad \lambda_{2i} \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n); \\
 \sum_{i=1}^n P_{Hi} = A.
 \end{array} \right. \quad (27)$$

Для нахождения значений n переменных (5), $2n$ значений множителей Лагранжа

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2i-1}, \lambda_{2i}, \dots, \lambda_{2n-1}, \lambda_{2n} \quad (28)$$

и еще одного множителя μ , удовлетворяющих всем равенствам и неравенствам, приведенным в (27), будем поступать следующим образом. Положим в (27) равными нулю все $\lambda_{2i-1}, \lambda_{2i}$, индексы которых включаются в множество $\tilde{I}_j(2n - m)$:

$$\lambda_{2i-1} = 0, \quad (29)$$

если $2i - 1 \in \tilde{I}_j(2n - m)$;

$$\lambda_{2i} = 0, \quad (30)$$

если $2i \in \tilde{I}_j(2n - m)$. Наоборот, предполагаем, что

$$\lambda_{2i-1} \neq 0, \quad (31)$$

если $2i-1 \in I_j(m)$, и

$$\lambda_{2i} \neq 0, \tag{32}$$

если $2i \in I_j(m)$.

Общее количество множителей λ_k с ненулевыми значениями при этом равно $2n - n$.

В результате предположений (29) – (32) из (27) можно получить систему $n + m + 1$ линейных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2(P_{Hi} - P_{Hi}^{(2)}) + \mu = 0; \\ (2i-1 \in \tilde{I}_j(2n-m); \quad 2i \in \tilde{I}_j(2n-m)); \\ 2(P_{Hi} - P_{Hi}^{(2)}) + \lambda_{2i} + \mu = 0; \quad P_{Hi} = P_{Hi}^{(2)}; \\ (2i \in I_j(m)); \\ 2(P_{Hi} - P_{Hi}^{(2)}) - \lambda_{2i-1} + \mu = 0; \quad P_{Hi} = P_{Hi}^{(1)}; \\ (2i-1 \in I_j(m)); \\ \sum_{i=1}^n P_{Hi} = A. \end{array} \right. \tag{33}$$

Относительно такого же числа неизвестных: n значений переменных (5), m множителей Лагранжа λ_k и один множитель μ .

Если система (33) разрешима относительно указанных неизвестных, причем оказываются выполненными условия (8) и все m найденных значений λ_k неотрицательны ($\lambda_k \geq 0$), то такое решение является решением исходной задачи (6) – (8).

В противном случае, когда хотя бы одно λ_k отрицательно или не выполняются некоторые из условий (8), решение системы (33) нельзя принимать в качестве решения задачи (6) – (8). Его поиск продолжается посредством рассмотрения различных вариантов системы уравнений (33), определяемых значениями целочисленных индексов j и m . Индекс j меняется в пределах (25), а индекс m в пределах от 1 до n .

Таким образом, решение задачи (6) – (8) сводится к последовательному рассмотрению большого количества систем (33). Процесс решения

завершается как только при численном решении очередной системы (33) оказывается, что найденные m множителей Лагранжа неотрицательны, а значения переменных (5) удовлетворяют условиям (8).

Произведем общую оценку количества систем линейных уравнений (33), которые подлежат рассмотрению при решении задачи (6) – (8). Это количество определяется возможным диапазоном изменения индекса j в (33). При заданном значении m индекс j может меняться в пределах от единицы до числа $N(n, m)$, определяемого по формуле (25). Ранее полагалось, что число m может принимать значения от 1 до n . Но в дальнейшем будем считать, что m может принимать и нулевое значение.

Равенство $m = 0$ эквивалентно предположению, что искомое решение задачи (6) – (8) не имеет места ни на одной из граней параллелепипеда (8). Таким образом, при $m = 0$ поиск решения осуществляется во внутренней точке допустимого множества. В этом случае имеет место всего лишь одна система линейных уравнений (19), которая получается из (33), если положить все множители Лагранжа (28) равными нулю.

Формально можно считать, что при нулевых значениях (28) количество систем уравнений определяется по формуле

$$N(n, 0) = C_n^0 C_n^0 = 1. \quad (34)$$

В результате общее число линейных систем (33), подлежащих рассмотрению при решении задачи (6) – (8), определяется по формуле

$$\tilde{N}(n) = \sum_{m=0}^n N(n, m). \quad (35)$$

Отметим, что каждое из чисел $N(n, m)$, определяемое по формуле (22), не превосходит числа C_{2n}^m – общего количества способов выбора m граней из $2n$ граней n – мерного параллелепипеда. Покажем это на простейших конкретных примерах.

Положим $n = 2$. Тогда число m может принимать значения 0, 1, 2. При $m = 0$ согласно (34) имеем $N(2, 0) = 1$. В силу (22) при $m = 1$ получим

$$N(2, 1) = C_2^0 C_2^1 + C_2^1 C_1^0 = 4, \quad (36)$$

а при $m = 2$

$$N(2, 2) = C_2^0 C_2^2 + C_2^1 C_1^1 + C_2^2 C_0^0 = 4. \quad (37)$$

Общее число систем (33), которые необходимо рассматривать при решении задачи (6) – (8) при $n = 2$, согласно (35) равно $\tilde{N}(2) = 1 + 4 + 4 = 9$. Кроме того, нетрудно видеть, что

$$N(2; 0) = C_4^0 = 1; \quad N(2; 1) = C_4^1 = 4; \quad N(2; 2) = 4 < C_4^2 = 6.$$

Когда $n = 3$, число m может принимать значения 0, 1, 2, 3. Согласно (34) и (22) имеем

$$\begin{aligned} N(3; 0) &= 1; \\ N(3; 1) &= C_3^0 C_3^1 + C_3^1 C_2^0 = 6; \\ N(3; 2) &= C_3^0 C_3^0 + C_3^1 C_2^1 + C_3^2 C_1^0 = 12; \\ N(3; 3) &= C_3^0 C_3^3 + C_3^1 C_2^2 + C_3^2 C_1^1 + C_3^3 C_0^0 = 8. \end{aligned}$$

Общее число линейных систем (33), подлежащих рассмотрению в процессе решения задачи (6) – (8) при $n = 3$, определяется по формуле (35): $\tilde{N}(3) = 1 + 6 + 12 + 8 = 27$. При этом выполняются неравенства

$$\begin{aligned} N(3; 0) &= C_6^0; \quad N(3; 1) = 6 = C_6^1; \\ N(3; 2) &= 12 < C_6^2 = 15; \quad N(3; 3) = 8 < C_6^3 = 20, \end{aligned}$$

которые являются частными случаями указанного выше соотношения $N(n, m) \leq 2^m$.

В качестве расчетного примера рассмотрим систему из двух станций и двух нагрузок. Мощности станций могут принимать значения в пределах

$$0 = P_{T1}^{(1)} \leq P_{T1} \leq P_{T1}^{(2)} = 50 \text{ МВт}; \quad 0 = P_{T2}^{(1)} \leq P_{T2} \leq P_{T2}^{(2)} = 70 \text{ МВт},$$

а нагрузки имеют значения в пределах

$$\begin{aligned} 40 \text{ МВт} &= P_{H1}^{(1)} \leq P_{H1} \leq P_{H1}^{(2)} = 80 \text{ МВт}; \\ 60 \text{ МВт} &= P_{H2}^{(1)} \leq P_{H2} \leq P_{H2}^{(2)} = 100 \text{ МВт}. \end{aligned}$$

Суммарная мощность станций, когда каждая из них работает с наибольшей граничной мощностью, превышает суммарное минимальное значение нагрузок

$$\left(P_{T1}^{(2)} + P_{T2}^{(2)} \right) = (50 + 70) \text{ МВт} \geq \left(P_{H1}^{(1)} + P_{H2}^{(1)} \right) = (40 + 60) \text{ МВт},$$

тем самым предположительно возможны режимы, когда нагрузки принимают значения, близкие своим наименьшим возможным значениям.

В этом примере $n = 2$ и задача (6) – (8) записывается следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1 = (P_{H1} - 80)^2 + (P_{H2} - 100)^2 \rightarrow \min; \\ P_{H1} + P_{H2} = 120; \\ 40 \leq P_{H1} \leq 80; \quad 60 \leq P_{H2} \leq 100. \end{array} \right. \quad (38)$$

Условия Куна–Таккера (18) принимают вид

$$\left\{ \begin{array}{l} 2(P_{H1} - 80) - \lambda_1 + \lambda_2 + \mu = 0; \\ 2(P_{H2} - 100) - \lambda_3 + \lambda_4 + \mu = 0; \\ -P_{H1} + 40 \leq 0; \quad P_{H1} - 80 \leq 0; \\ -P_{H2} + 60 \leq 0; \quad P_{H2} - 100 \leq 0; \\ \lambda_1(-P_{H1} + 40) = 0; \quad \lambda_2(P_{H1} - 80) = 0; \\ \lambda_3(-P_{H2} + 60) = 0; \quad \lambda_4(P_{H2} - 100) = 0; \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0; \quad P_{H1} + P_{H2} = 120. \end{array} \right. \quad (39)$$

Для нахождения точек $(P_{H1}, P_{H2}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \mu)$, удовлетворяющих условиям Куна–Таккера (39), как было установлено выше, необходимо указать варианты задания нулевых значений для некоторых из множителей λ_k ($k = 1, 2, 3, 4$), что эквивалентно заданию множества номеров граней $\tilde{I}_j(2n - m)$. Поскольку в данном примере $n = 2$, согласно (36) и (37) необходимо рассматривать 4 варианта, в которых из четырех параметров λ_k два задаются равными нулю, и 4 варианта с тремя нулевыми значениями λ_k . Кроме того, должен рассматриваться случай равенства нулю всех λ_k ($k = 1, 2, 3, 4$).

При двух нулевых множителях Лагранжа (два другие множителя при этом предполагаются отличными от нуля), вообще говоря, возможны 6 вариантов:

$$\begin{array}{l} \text{а) } \lambda_1 = \lambda_3 = 0; \text{ г) } \lambda_2 = \lambda_4 = 0; \\ \text{б) } \lambda_1 = \lambda_4 = 0; \text{ д) } \lambda_1 = \lambda_2 = 0; \\ \text{в) } \lambda_2 = \lambda_3 = 0; \text{ е) } \lambda_3 = \lambda_4 = 0. \end{array} \quad (40)$$

Но варианты «д» и «е» следует отбросить, поскольку в первом из них в множество $I_j(m)$ включаются номера противоположных граней, соответствующих координатной оси 2, а во втором – первой координатной оси. Следствием этого являются противоречивые равенства для значений переменных P_{H1} и P_{H2} , которые следуют из уравнений дополняющей нежесткости: д) $P_{H2} = 60$; $P_{H2} = 100$, е) $P_{H1} = 40$; $P_{H1} = 80$.

Для рассмотрения остаются 4 варианта «а» – «г». Из уравнений дополняющей нежесткости следует:

- в случае «а» имеем $P_{H1} = 80$ МВт, $P_{H2} = 100$ МВт ;
- в случае «б» имеем $P_{H1} = 80$ МВт, $P_{H2} = -60$ МВт ;
- в случае «в» имеем $P_{H1} = -40$ МВт, $P_{H2} = 100$ МВт ;
- в случае «г» имеем $P_{H1} = -40$ МВт, $P_{H2} = 60$ МВт .

В каждом из этих случаев имеется противоречие условию баланса $P_{H1} + P_{H2} = 120$ МВт в (38).

Переходим к рассмотрению вариантов, а которых три параметра λ_i равны нулю. Их общее число согласно (37) равно 4. Это варианты:

$$\begin{aligned}
 \text{а) } & \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0; \lambda_4 \neq 0; \\
 \text{б) } & \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_4 = 0; \lambda_3 \neq 0; \\
 \text{в) } & \lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0; \lambda_2 \neq 0; \\
 \text{г) } & \lambda_4 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0; \lambda_1 \neq 0.
 \end{aligned}
 \tag{41}$$

• В случае «а» с учетом уравнений дополняющей нежесткости имеем $P_{H2} = 100$ МВт, а из условия баланса $P_{H1} = 20$ МВт, что противоречит исходному условию $P_{H1} \geq 40$ МВт.

• В случае «б» имеем $P_{H2} = 60$ МВт, кроме того, из уравнения $P_{H1} + P_{H2} = 120$ МВт следует, что $P_{H1} = 60$ МВт. После чего первые два уравнения в (39) записываются в виде

$$\begin{cases} -40 + \mu = 0; \\ -80 - \lambda_3 + \mu = 0, \end{cases}$$

откуда следует: $\mu = 40$, $\lambda_3 = -40$, т.е. $\lambda_3 < 0$. Тем самым не выполняется условие $\lambda_3 > 0$.

• В случае «в» имеем $P_{H1} = 80$ МВт, $P_{H2} = 40$ МВт, что противоречит исходному условию $P_{H2} > 60$ МВт.

• В случае «г» имеем $P_{H1} = 40$ МВт, $P_{H2} = 80$ МВт. Первые два уравнения в (39) принимают вид

$$\begin{cases} -80 - \lambda_1 + \mu = 0; \\ -40 + \mu = 0, \end{cases}$$

откуда $\mu = 40$, $\lambda_1 = -40$. Не выполняется условие $\lambda_1 \geq 0$.

Остаётся рассмотреть последнюю возможность:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0. \quad (42)$$

Тогда из первых трёх уравнений (39) имеем линейную систему относительно P_{H1} , P_{H2} , μ :

$$\begin{cases} 2(P_{H1} - 80) + \mu = 0; \\ 2(P_{H2} - 100) + \mu = 0; \\ P_{H1} + P_{H2} = 120. \end{cases} \quad (43)$$

Её решение:

$$P_{H1} = 50 \text{ МВт}; P_{H2} = 70 \text{ МВт}; \mu = 60. \quad (44)$$

Оно удовлетворяет всем условиям задачи (39). При этом в точках $P_{H1} = 50$ МВт ; $P_{H2} = 70$ МВт достигается условный минимум функции F_1 :

$$\min F_1 = (50 - 80)^2 + (70 - 100)^2 = 1800.$$

О наличии минимума свидетельствует неотрицательность всех параметров λ_i , согласно (42) они все равны нулю. Совокупность параметров (42), (44) удовлетворяет всем условиям Куна–Таккера (39).

Результат этих рассмотрений: разность между максимальными мощностями станций $(P_{T1}^{(2)} + P_{T2}^{(2)})$ и суммарными минимальными нагрузками $(P_{H1}^{(1)} + P_{H2}^{(1)})$, равная $120 - 100 = 20$ МВт, должна быть распределена поровну между станциями.

Рассмотренная задача (38) имела решение во внутренней точке допустимой области изменения переменных P_{H1} , P_{H2} . При этом все ограничения в виде неравенств оказываются пассивными. В этом случае полученное решение совпадает с решением более простой задачи

$$\begin{cases} \tilde{F}_1 = (P_{H1} - 80)^2 + (P_{H2} - 100)^2 \rightarrow \min, \\ P_{H1} + P_{H2} = 120, \end{cases} \quad (45)$$

решение которой методом Лагранжа также приводит к системе линейных уравнений (43). Таким образом, задание в условиях Куна–Таккера всех параметров λ_k равными нулю эквивалентно поиску решения исходной задачи (38) во внутренних точках допустимой области. Этот вывод справедлив и в общем случае задачи (6) – (8).

Теперь приведем пример, в котором ограничения в виде неравенств оказываются активными. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} F_1 = (P_{H1} - 80)^2 + (P_{H2} - 100)^2 \rightarrow \min; \\ P_{H1} + P_{H2} = 120; \\ 40 \leq P_{H1} \leq 80; \quad 75 \leq P_{H2} \leq 100, \end{cases} \quad (46)$$

которая отличается от (38) лишь нижней допустимой границей для переменной P_{H2} .

Условия Куна–Таккера в данном случае записываются следующим образом:

$$\begin{cases} 2(P_{H1} - 80) - \lambda_1 + \lambda_2 + \mu = 0; \\ 2(P_{H2} - 100) - \lambda_3 + \lambda_4 + \mu = 0; \\ -P_{H1} + 40 \leq 0; \quad P_{H1} - 80 \leq 0; \\ -P_{H2} + 75 \leq 0; \quad P_{H2} - 100 \leq 0; \\ \lambda_1(-P_{H1} + 40) = 0; \quad \lambda_2(P_{H1} - 80) = 0; \\ \lambda_3(-P_{H2} + 75) = 0; \quad \lambda_4(P_{H2} - 100) = 0; \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0; \quad P_{H1} + P_{H2} = 120, \end{cases} \quad (47)$$

они незначительно отличаются от условий (39) для задачи (38).

При отыскании точек, удовлетворяющих условиям Куна–Таккера (47), подлежат рассмотрению те же варианты задания некоторых из параметров λ_k ($k = 1, 2, 3, 4$) равных нулю, как и в предыдущей задаче (38).

Эти варианты «а», «б», «в», «г» из (40); все варианты (41) и вариант (42).

Для случаев «а» – «г» из (40) имеем

$$\begin{aligned} \text{а) } P_{H1} &= 80; \quad P_{H2} = 100; \quad \text{б) } P_{H1} = 80; \quad P_{H2} = 75; \\ \text{в) } P_{H1} &= 40; \quad P_{H2} = 100; \quad \text{г) } P_{H1} = 40; \quad P_{H2} = 75. \end{aligned}$$

Но во всех этих случаях не удовлетворяется уравнение баланса $P_{H1} + P_{H2} = 120$.

Для четырех вариантов из (41) с учетом уравнений дополняющей нежесткости и условия баланса $P_{H1} + P_{H2} = 120$ имеем:

$$\begin{aligned} \text{а) } P_{H1} &= 20; \quad P_{H2} = 100; \quad \text{б) } P_{H1} = 45; \quad P_{H2} = 75; \\ \text{в) } P_{H1} &= 80; \quad P_{H2} = 40; \quad \text{г) } P_{H1} = 40; \quad P_{H2} = 80. \end{aligned} \quad (48)$$

Случаи «а» и «в» дальнейшему рассмотрению не подлежат, так как не выполняются ограничения для P_{H1} в случае «а» и для P_{H2} в случае «в».

Рассмотрим случай «б». Из первых двух уравнений (47) получается система уравнений

$$\begin{cases} -70 & + \mu = 0; \\ -50 - \lambda_3 & + \mu = 0 \end{cases}$$

для определения λ_3 и μ . Имеем $\lambda_3 = 20$; $\mu = 170$. Поскольку $\lambda_3 > 0$, то точка $(P_{H1} = 45; P_{H2} = 75)$ является искомой точкой минимума целевой функции при заданных ограничениях. В силу единственности решения задач выпуклого программирования на полученной точке $(P_{H1} = 45; P_{H2} = 75)$ можно остановиться.

Тем не менее для полного рассмотрения обратимся к случаю «г» (48). Здесь система уравнений относительно λ_1 и μ имеет вид

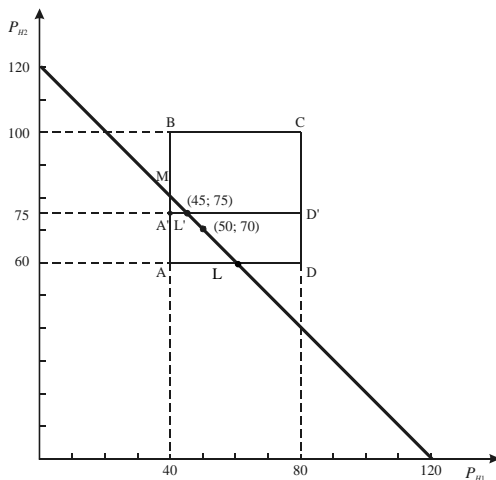
$$\begin{cases} -80 - \lambda_1 & + \mu = 0; \\ -40 & + \mu = 0, \end{cases}$$

ее решения: $\lambda_1 = -40$; $\mu = 40$. Поскольку $\lambda_1 < 0$, то точка $(P_{H1} = 40; P_{H2} = 80)$ не может быть точкой минимума.

Наконец отметим, что при всех $\lambda_i = 0$ для определения P_{H1} , P_{H2} и μ , как и для случая задачи (38), имеет место система уравнений (43), решение которой не удовлетворяет новому ограничению на величину P_{H2} .

Итак, минимум в задаче (46) достигается в точке $(P_{H1} = 45; P_{H2} = 75)$, которая в отличие от точки в задаче (38) достигается не внутри области допустимого изменения параметров P_{H1} , P_{H2} , а на ее границе.

Рассмотренные примеры не трудно проиллюстрировать геометрически. На рисунке допустимая область изменения переменных P_{H1} , P_{H2} для задачи (38) представляет собой отрезок ML прямой $P_{H1} + P_{H2} = 120$, образуемый пересечением этой прямой с квадратом $ABCD$: $40 \leq P_{H1} \leq 80$; $60 \leq P_{H2} \leq 100$. Точка $(50; 70)$ минимума целевой функции – одна из внутренних точек отрезка ML .



Допустимые области изменения переменных P_{H1} , P_{H2} в задачах

В задаче (46) допустимая область изменения параметров P_{H1} и P_{H2} является отрезком ML' на той же прямой $P_{H1} + P_{H2} = 120$, который образуется на пересечении этой прямой с параллелепипедом $A'B'CD'$: $40 \leq P_{H1} \leq 80$; $75 \leq P_{H2} \leq 100$. Теперь минимум достигается в точке $(45; 75)$, которая является одним из концов отрезка ML' .

Библиографический список

1. Мисриханов М.Ш., Морошкин Ю.В. Критерии устойчивости консервативных электроэнергетических систем без шин неизменного напряжения на основе методов аналитической механики // Повышение эффективности работы энергосистем: Тр. ИГЭУ. – Вып. 5. – Иваново, 2002. – С. 139–149.

2. Мисриханов М.Ш., Морошкин Ю.В., Хвоцинская З.Г. Системный подход к моделированию переходных процессов в электроэнергетических системах // Повышение эффективности работы энергосистем: Тр. ИГЭУ. – Вып. 5. – Иваново, 2002. – С. 150–157.

3. Мисриханов М.Ш., Морошкин Ю.В., Хвоцинская З.Г. Перспективы использования консервативных математических моделей электроэнергетических систем при исследовании динамической устойчивости // Электроэнергетика России: современное состояние, проблемы перспективы: Сб. науч. тр. – М.: Энергоатомиздат, 2002.

4. Мисриханов М.Ш., Морошкин Ю.В. Устойчивость движения электроэнергетических систем // Повышение эффективности работы энергосистем: Тр. ИГЭУ. – Вып. 5. – Иваново, 2002. – С. 136–138.

5. Мисриханов М.Ш., Морошкин Ю.В., Поздняков А.Ю. Способы построения консервативных моделей переходных электромеханических процессов в электроэнергетических системах // Электроэнергетика России: современное состояние, проблемы, перспективы: Сб. науч. тр. – М.: Энергоатомиздат, 2002.

6. Мисриханов М.Ш., Морошкин Ю.В. Возможности использования консервативных математических моделей электроэнергетических систем при разработке САПР и выборе мероприятий для обеспечения устойчивости // Электроэнергетика России: современное состояние, проблемы, перспективы: Сб. науч. тр. – М.: Энергоатомиздат, 2002.

УДК 621.311

**Математическая модель управляемой межсистемной связи
на основе управляемых реакторов**

А.В. Макаров, канд. тех. наук, О.В. Таламанов, асп.

Одной из тенденций развития электроэнергетики России является создание открытого рынка электрической энергии. Это требует решения комплекса организационных, технических и экономических проблем. Упрощенный стандартный экономический подход к этой проблеме, игнорирование особой специфики электрической энергии как товара могут повлечь жесточайшие системные аварии и нарушение электроснабжения, а в конечном счете значительные убытки всех субъектов рыночных отношений.

Либерализация рынка электрической энергии вызывает увеличение незапланированных обменов мощностью как внутри системы, так и по

межсистемным связям. Это может вызвать нарушение статической и динамической устойчивости и в конечном счете снижает эффективность работы системы, ее надежность и живучесть. Одним из решений этой проблемы является повышение эффективности работы межсистемных связей, в частности использование управляемых межсистемных связей (УМС).

Наиболее проработанным и единственным внедренным вариантом технической реализации УМС являются передачи и вставки постоянного тока (ППТ и ВПТ). К настоящему времени предложено значительное количество альтернативных вариантов установок УМС, различных по принципу действия и составу оборудования [1]. Представляется перспективным разработка УМС на основе ферромагнитных управляемых элементов. Особый интерес представляют УМС на основе реакторов, управляемых подмагничиванием (управляемых реакторов). Предварительные оценки технико-экономических показателей, приведенные в [2 – 4], показали, что устройства данного типа могут успешно конкурировать с УМС альтернативных направлений.

Проектирование реального промышленного или экспериментального образца требуемой мощности невозможно без наличия математической модели установки. Характеристики установки в значительной степени зависят от выбранных алгоритмов управления, оптимальный синтез которых невозможен без знания статических и динамических характеристик объекта. Для решения этой задачи необходимо создание математической модели установки УР УМС, позволяющей проводить исследования в установившихся и переходных режимах.

Схема устройства межсистемной связи на основе управляемых реакторов приведена на рис. 1. Одна цепь УР УМС состоит из двух независимых полуцепей, в одной из энергосистем сдвинутых друг относительно друга схемным путем на угол 180° . Каждая полуцепь состоит из шести одинаковых управляемых реакторов, источника напряжения подмагничивания (управляемого выпрямителя) и системы управления установкой.

Каждая фаза связываемых энергосистем объединена через два последовательно соединенных управляемых реактора. Обмотки подмагничивания каждой пары реакторов соединяются последовательно встречно и образуют обмотку подмагничивания УР.

При отсутствии токов в обмотках подмагничивания УР мощность, передаваемая через каждую полуцепь, взаимоуравновешивается и в целом через цепь мощность не передается.

При подаче тока в одну из обмоток подмагничивания, например в первую при нулевом токе во второй, магнитопроводы управляемых реак-

торов первой полупеи насыщаются, и магнитный поток вытесняется на пути рассеяния. Индуктивное сопротивление реакторов первой полупеи резко уменьшается, и увеличивается величина передаваемой через полупеи мощности.

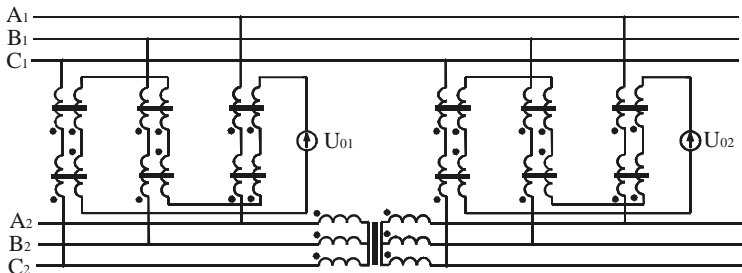


Рис. 1. Схема одной полупеи УР УМС

При подаче тока во вторую обмотку подмагничивания насыщаются реакторы второй полупеи, и передача мощности происходит через реакторы второй полупеи. Вторая полупеи сдвинута относительно первой в одной из энергосистем схемным путем на угол π по угловой мере частоты скольжения. Особенностью предлагаемой установки УМС является использование двух последовательно соединенных управляемых реакторов, обмотки подмагничивания которых соединены встречно. Аналогичное техническое решение применяется для создания цепей подмагничивания в управляемых межсистемных связях на основе фазоинвертирующих трансформаторов [5, 6]. Такое соединение обмоток подмагничивания предотвращает трансформацию первой гармоники в эти цепи. Цепи подмагничивания всех управляемых реакторов одной полупеи включаются последовательно и образуют ее обмотку подмагничивания, что препятствует появлению в них токов первой всех четных гармоник. Это позволяет использовать для регулирования токов подмагничивания управляемые источники напряжения.

При работе связываемых систем с разными частотами угол δ между векторами напряжений их непрерывно изменяется. Изменяя токи в обмотках подмагничивания по определенному закону функции угла δ , можно обеспечить направленную передачу активной мощности в разночастотном режиме.

Угловая характеристика управляемого реактора близка к синусоидальной. При углах δ , равных 0 и π , передаваемая активная мощность

всегда равна нулю. Для передачи в разночастотном режиме постоянной во времени активной мощности необходимо использование нескольких цепей, включенных параллельно и сдвинутых системным путем на некоторый угол. При использовании двух параллельных цепей передачи угол сдвига составляет $\pi/2$, а при использовании трех параллельных цепей углы сдвига составляют $2\pi/3$ и $4\pi/3$.

Использование трех параллельных цепей передачи представляется более целесообразным по соображениям простоты реализации схемного сдвига (рис. 2), надежности и живучести установки.

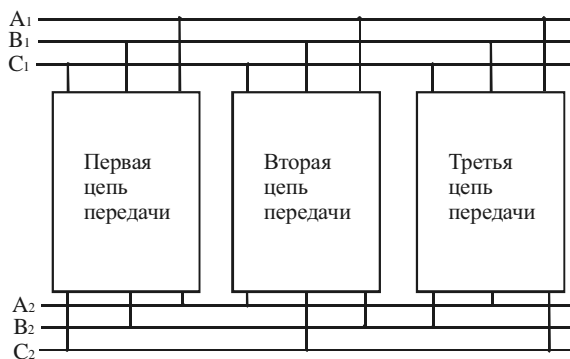


Рис. 2. Схема трехцепной установки УР УМС

При создании математической модели устройства УР УМС используются системы уравнений для мгновенных значений, записанные по законам Кирхгофа для электрических и магнитных цепей устройства ФИТМС при учете следующих допущений:

- установка подключена к двум системам бесконечной мощности;
- не учитываются потери в стали магнитопроводов на гистерезис и вихревые токи;
- индуктивности рассеяния обмоток реакторов считаются линейными.

Двухобмоточные реакторы, из которых выполнена установка, имеют сечение сердечника магнитопровода s , среднюю длину магнитной силовой линии l , число витков рабочей обмотки w и обмотки подмагничивания w_0 . Индуктивность рассеяния рабочей обмотки L ; обмотки цепей подмагничивания L_0 . Полуцепи рассматриваемой цепи передачи являются полностью идентичными и взаимно независимыми. Это позволяет использовать математическую модель одной полуцепи в качестве базовой

для модели всей установки в целом. Схема замещения одной полупеци установки представлена на рис. 3.

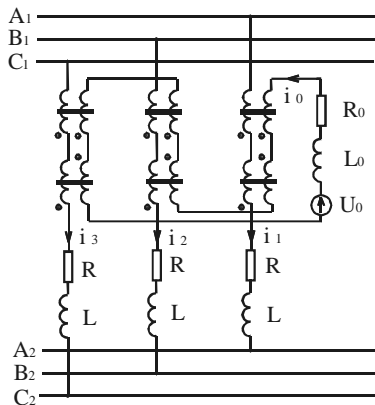


Рис. 3. Схема замещения установки УР УМС (одна полупеци)

Кривая намагничивания аппроксимируется аналитическим выражением

$$B = \alpha \cdot \arctg(\beta \cdot H) + \gamma \cdot H, \quad (1)$$

где α, β, γ – коэффициенты аппроксимации.

Для электрической схемы замещения, составленной с учетом принятых допущений, составляется система дифференциальных уравнений по второму закону Кирхгофа:

$$ws \frac{dB_1}{dt} + ws \frac{dB_2}{dt} + L \frac{di_1}{dt} = E_{1A} - E_{2A} - ri_1, \quad (2)$$

$$ws \frac{dB_3}{dt} + ws \frac{dB_4}{dt} + L \frac{di_2}{dt} = E_{1B} - E_{2B} - ri_2, \quad (3)$$

$$ws \frac{dB_5}{dt} + ws \frac{dB_6}{dt} + L \frac{di_3}{dt} = E_{1C} - E_{2C} - ri_3, \quad (4)$$

$$w_0s \frac{dB_1}{dt} - w_0s \frac{dB_2}{dt} + w_0s \frac{dB_3}{dt} - w_0s \frac{dB_4}{dt} + w_0s \frac{dB_5}{dt} - w_0s \frac{dB_6}{dt} + 6L_0 \frac{di_0}{dt} = U_{01} - 6r_0i_0, \quad (5)$$

где $B_1 - B_6$ – индукции в магнитопроводах 1...6.

По закону полного тока определяются напряженности $H_1...H_6$ в магнитопроводах 1...6:

$$H_1 = \frac{(wi_1 + w_0i_0)}{l}, \quad (6)$$

$$H_2 = \frac{(wi_1 - w_0i_0)}{l}, \quad (7)$$

$$H_3 = \frac{(wi_2 + w_0i_0)}{l}, \quad (8)$$

$$H_4 = \frac{(wi_2 - w_0i_0)}{l}, \quad (9)$$

$$H_5 = \frac{(wi_3 + w_0i_0)}{l}, \quad (10)$$

$$H_6 = \frac{(wi_3 - w_0i_0)}{l}. \quad (11)$$

Учитывая, что

$$\frac{dB}{dt} = \left(\frac{\alpha\beta}{1+(\beta H)^2} + \gamma \right) \frac{dH}{dt}, \quad (12)$$

подставляем (6) – (11) в (2) – (5) и после преобразований получаем:

$$(w^2(a_1 + a_2 + 2k) + L) \frac{di_1}{dt} + ww_0(a_1 - a_2) \frac{di_0}{dt} = E_{1A} - E_{2A} - i_1r, \quad (13)$$

$$(w^2(b_1 + b_2 + 2k) + L) \frac{di_2}{dt} + ww_0(b_1 - b_2) \frac{di_0}{dt} = E_{1B} - E_{2B} - i_2r, \quad (14)$$

$$(w^2(c_1 + c_2 + 2k) + L) \frac{di_3}{dt} + ww_0(c_1 - c_2) \frac{di_0}{dt} = E_{1C} - E_{2C} - i_3r, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & ww_0(a_1 - a_2) \frac{di_1}{dt} + ww_0(b_1 - b_2) \frac{di_2}{dt} + ww_0 \cdot (c_1 - c_2) \frac{di_3}{dt} + \\ & + (w_0^2(a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + 6k) + 6L_0) \frac{di_{01}}{dt} = U_0 - 6r_0i_0, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{s\alpha\beta}{l \left(1 + \frac{\beta^2}{l^2} (i_1 w + w_0 i_0)^2 \right)}, \\
 a_2 &= \frac{s\alpha\beta}{l \left(1 + \frac{\beta^2}{l^2} (i_1 w - w_0 i_0)^2 \right)}, \\
 b_1 &= \frac{s\alpha\beta}{l \left(1 + \frac{\beta^2}{l^2} (i_2 w + w_0 i_0)^2 \right)}, \\
 b_2 &= \frac{s\alpha\beta}{l \left(1 + \frac{\beta^2}{l^2} (i_2 w - w_0 i_0)^2 \right)}, \\
 c_1 &= \frac{s\alpha\beta}{l \left(1 + \frac{\beta^2}{l^2} (i_3 w + w_0 i_0)^2 \right)}, \\
 c_2 &= \frac{s\alpha\beta}{l \left(1 + \frac{\beta^2}{l^2} (i_3 w - w_0 i_0)^2 \right)}, \quad k = \frac{\gamma s}{l}.
 \end{aligned}$$

Данная система уравнений является математическим описанием процессов в устройстве УМС на основе управляемых реакторов и используется для построения вычислительной модели УР УМС. В качестве инструментальных средств моделирования используется пакет программ Mathcad. Разработанная модель может быть также использована для анализа системы регулирования установкой.

На рис. 4 – 7 представлены угловые и переходные характеристики УР УМС. Характеристики были сняты для управляемых реакторов со следующими параметрами: сопротивлением обмоток 10 мОм; индуктивностью рассеяния обмоток 10 мкГн; числом витков обмоток 100; длиной средней линии магнитопровода 2,5 м; площадью сечения сердечника магнитопровода 0,04 м²; номинальным напряжением связываемых энергосистем 380/220 В.

Характеристики приведены для случая изменения токов управления по закону «меандр» при значениях максимального тока 400, 200, 100, 50 и 0 А. Разработанная математическая модель позволяет также исследовать работу УР УМС при любых других законах изменения токов подмагничивания.

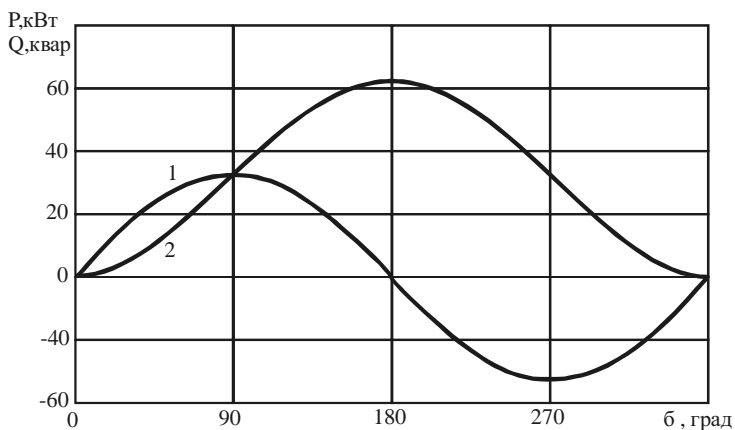


Рис. 4. Динамическая угловая характеристика для передаваемой активной и потребляемой реактивной мощностей при токе подмагничивания 400 А:
1 – передаваемая активная мощность; 2 – потребляемая реактивная мощность

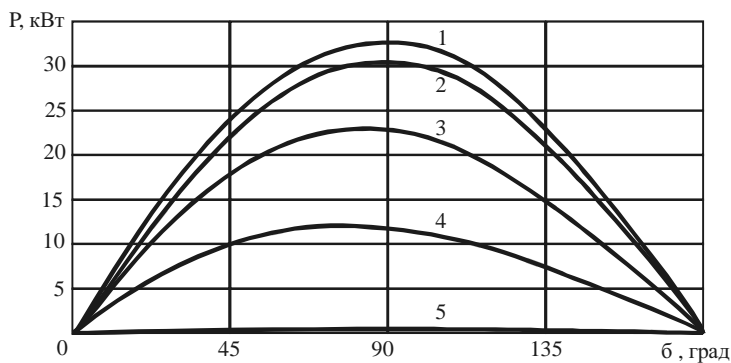


Рис. 5. Угловые характеристики передаваемой активной мощности при различных значениях тока подмагничивания I_n :
1 – $I_n = 400$ А; 2 – $I_n = 200$ А; 3 – $I_n = 100$ А; 4 – $I_n = 50$ А; 5 – $I_n = 0$ А

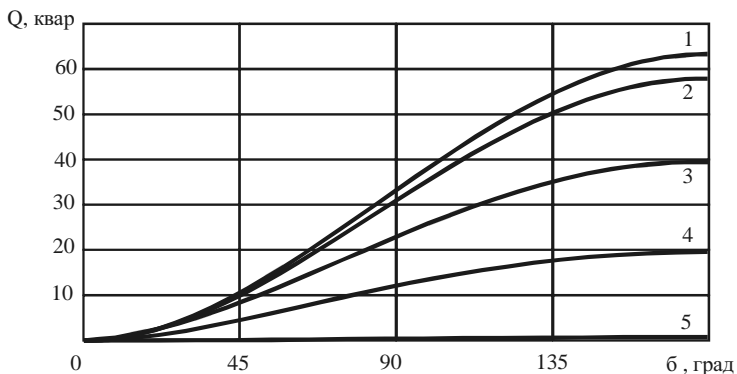


Рис. 6. Угловые характеристики потребляемой реактивной мощности при различных значениях тока подмагничивания I_n .

1 – $I_n = 400$ А; 2 – $I_n = 200$ А; 3 – $I_n = 100$ А; 4 – $I_n = 50$ А; 5 – $I_n = 0$ А

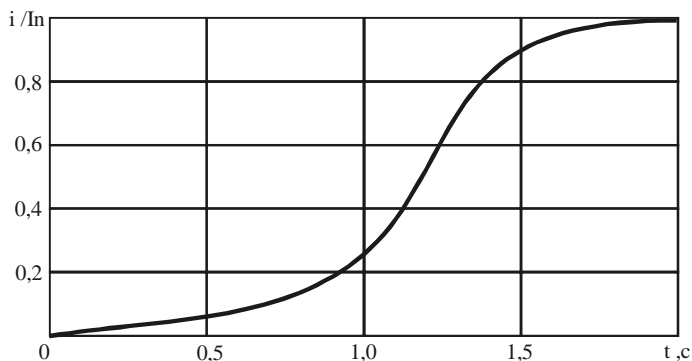


Рис. 7. Переходная характеристика цепи подмагничивания УР УМС

Разработанная математическая модель установки УР УМС позволяет исследовать процессы в установившихся и переходных режимах. Модель позволяет получить полный спектр статических угловых и регулировочных характеристик объекта, необходимых для принятия схемных и конструктивных решений при проектировании установки УР УМС промышленных масштабов. Возможность проведения исследований в переходных режимах позволяет использовать модель для синтеза алгоритмов и структуры системы управления объектом.

Библиографический список

1. **Hingorani N.G., Gyugyi L.**, Understanding FACTS: Concepts and Technology of Flexible AC Transmission System. – New York: Wiley-IEEE Press, 1999. – P. 452.
2. **Макаров А.В.** Разработка и исследование системы управления межсистемной не-синхронной связи на основе ферромагнитных элементов: Дис. ... канд. техн. наук: 05.14.02. – Л.: ЛПИ, 1985. – 214 с.
3. **Баранов В.М.** Исследование характеристик и разработка системы регулирования управляемой связи электрических систем на основе ферромагнитных элементов: Дис. ... канд. техн. наук. – Л.: ЛПИ, 1987.
4. **Александров Г.Н., Зайцев С.Г., Благодарев В.И.** Управляемые реакторы в качестве силовых элементов ферромагнитных вставок переменного тока (ФВПТ). Методы и средства оценки состояния энергетического оборудования // Издание ПЭИПК. – Вып. 11. – СПб.; Екатеринбург, 2000. – С. 181–193.
5. **А.с. 1417749 (СССР).** Устройство для объединения энергосистем.
6. **А.с. 1340546 (СССР).** Устройство для объединения энергосистем.

УДК 621.313.001.63

**Математическая модель несимметричных
переходных процессов силового трансформатора**

В.А.Мартынов, д-р техн. наук

Одним из важных направлений в теории силовых трансформаторов является учет несимметричных переходных процессов, которые возникают при изменении параметров как самого трансформатора, например, при обрыве или коротком замыкании обмоток, так и присоединенной нагрузки. Несмотря на обычную ограниченность во времени, переходные процессы оказывают сильное влияние на работу трансформатора и присоединенного к нему электрооборудования. Заранее выполненный расчет аварийного переходного процесса необходим для наладки автоматической защиты. Анализ несимметричных переходных процессов в силовых трехфазных трансформаторах затруднен нелинейностью магнитной цепи и учетом нагрузки, содержащей в общем случае как индуктивные, так и емкостные элементы. Несмотря на появление в последние годы эффективных численных методов расчета динамических процессов электро-

магнитных устройств [1] и внедрение в инженерную практику расчетов быстродействующей вычислительной техники, анализ несимметричных переходных режимов трансформаторов, как правило, проводится с использованием метода наложения принужденного и свободного режимов. При этом расчет принужденного режима производится методом симметричных составляющих, а учет свободных составляющих достигается введением различных коэффициентов, выявленных на основе сопоставления накопленных экспериментальных и расчетных данных. Очевидно, что такой подход базируется на довольно грубых допущениях и неадекватен возможностям современной вычислительной техники.

В настоящее время при анализе нелинейных динамических схем широко применяется метод переменных состояния [2], который совместим со многими методами численного интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений и может считаться универсальным методом. На основе этого метода предлагается математическая модель нелинейных динамических процессов силового трансформатора, учитывающая несимметрию параметров как самого трансформатора, так и присоединенной нагрузки. Поскольку переходные процессы происходят при переходе от одного установившегося режима к другому, очевидно, что такая модель может быть применена и для исследования стационарных несимметричных процессов и получения статических характеристик трансформаторов.

При моделировании процессов в трансформаторе будем считать, что насыщение магнитной цепи обусловлено только главными магнитными потоками, замыкающимися по стальному магнитопроводу, а потоки рассеяния отдельных ветвей трансформатора могут быть учтены соответствующими линейными индуктивностями рассеяния. В качестве примера на рис. 1 приведена магнитная цепь трехстержневого трехфазного двухобмоточного трансформатора [3]. При этом ветвь с потоком Φ_N соответствует магнитному потоку, который при несимметричном режиме замыкается от одного яра к другому через масло и бак трансформатора (поток нулевой последовательности).

Магнитная цепь трансформатора при любых токах и напряжениях его ветвей может быть представлена схемой замещения с сосредоточенными параметрами, которая будет содержать нелинейные и линейные проводимости и источники МДС [1]. На рис. 2 приведена схема замещения магнитной цепи трехстержневого трансформатора. На рисунке не показаны цепи магнитных потоков рассеяния, так как они практически не влияют на распределение магнитных потоков в стальном сердечнике.

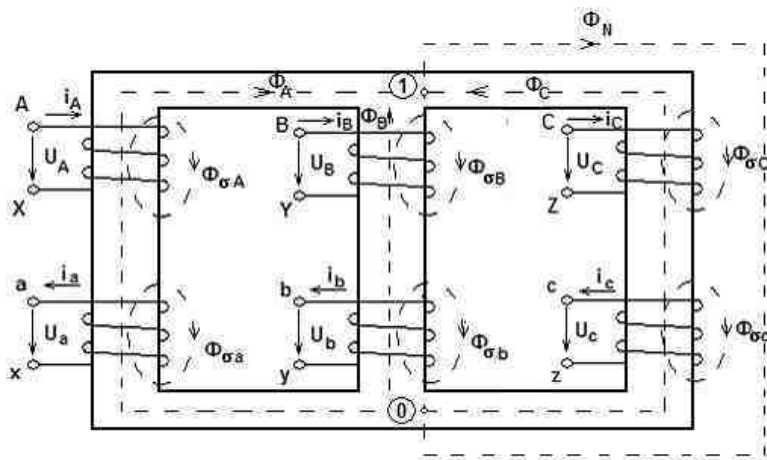


Рис. 1. Магнитная цепь трехфазного трехстержневого трансформатора

Представим каждую k -ю ветвь схемы замещения магнитной цепи трансформатора в виде обобщенной ветви, образованной последовательным соединением нелинейного элемента и источника МДС F_k (рис. 3, а), при этом Φ_k , U_{mk} – поток и падение магнитного напряжения на k -м элементе: $U_k = \varphi_a - \varphi_b$ – магнитное напряжение на обобщенной ветви; φ_a , φ_b – магнитные потенциалы узлов обобщенной ветви.

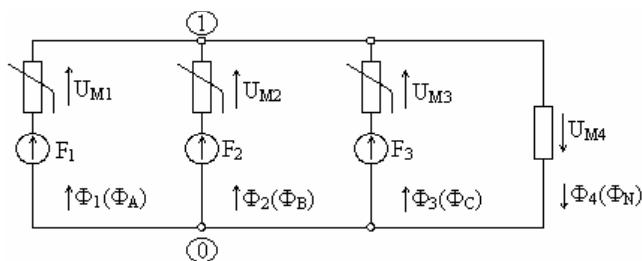


Рис. 2. Схема замещения магнитной цепи трехфазного трехстержневого трансформатора

Вебер-амперные характеристики каждого нелинейного элемента $\Phi_k(U_{mk})$ (рис. 3, б) рассчитываются заранее [1] и считаются известными.

ми. При кусочно-линейной аппроксимации зависимости $\Phi_k(U_{mk})$ справедливо соотношение

$$\Phi_k = \Lambda_k U_{mk} + J_k, \quad (1)$$

где Λ_k – дифференциальная проводимость k -й ветви; J_k – управляемый напряжением U_{mk} источник магнитного потока.

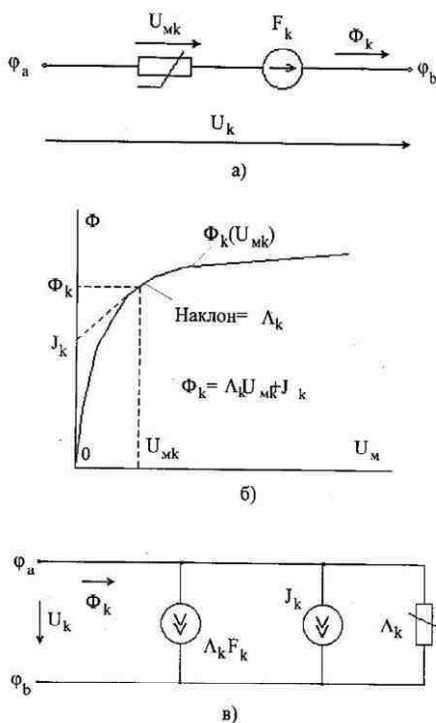


Рис .3. Обобщенная ветвь схемы замещения магнитной цепи и вебер-амперная характеристика ее нелинейного элемента

Пронумеруем слева направо все отрезки аппроксимированной k -й кривой $\Phi_k(U_{mk})$. Если через σ_k обозначить один из отрезков характеристики, то величины Λ_k и J_k в (1) будут определяться номером отрезка σ_k ,

который, в свою очередь, зависит от значений Φ_k или U_{mk} (рис. 3, б). Для линейных ветвей зависимость $\Phi_k(U_{mk})$ представляет собой прямую линию, поэтому величина Λ_k является постоянной, а $J_k = 0$.

Так как напряжение $U_{mk} = U_k + F_k$, то уравнение (1) можно записать как

$$\Phi_k = \Lambda_k U_k + \Lambda_k F_k + J_k. \quad (2)$$

Последнему уравнению соответствует схема замещения k -й ветви, приведенная на рис. 1, в.

Обозначим через n число ветвей схемы замещения магнитной цепи трансформатора и введем следующие обозначения:

$[\Phi]$ – матрица-столбец магнитных потоков всех ветвей:

$$[\Phi] = [\Phi_1 \ \Phi_2 \ \dots \ \Phi_k \ \dots \ \Phi_n]^T;$$

$[U_M]$ – матрица-столбец падений магнитного напряжения на элементах ветвей:

$$[U_M] = [U_{m1} \ U_{m2} \ \dots \ U_{mk} \ \dots \ U_{mn}]^T;$$

$[U]$ – матрица-столбец магнитных напряжений на обобщенных ветвях:

$$[U] = [U_1 \ U_2 \ \dots \ U_k \ \dots \ U_n]^T;$$

$[F]$ – матрица-столбец источников МДС всех ветвей:

$$[F] = [F_1 \ F_2 \ \dots \ F_k \ \dots \ F_n]^T.$$

С учетом принятых обозначений уравнение (2) можно записать для всех ветвей в матричной форме:

$$[\Phi] = [\Lambda][U] + [\Lambda][F] + [J], \quad (3)$$

где $[\Lambda]$ – диагональная матрица дифференциальных проводимостей ветвей:

$$[\Lambda] = \text{diag}[\Lambda_1 \ \Lambda_2 \ \dots \ \Lambda_k \ \dots \ \Lambda_n];$$

$[J]$ – матрица-столбец управляемых напряжением источников магнитного потока:

$$[J] = [J_1 \ J_2 \dots J_k \dots J_n]^T.$$

Как показано в [1], величины МДС ветвей схемы замещения магнитной цепи трансформатора $[F]$ могут быть выражены через значения токов ветвей трансформатора $[i_T]$ с помощью сингулярной матрицы преобразования $[C]$:

$$[F] = [C][i_m]. \quad (4)$$

Матрица $[C]$ имеет число столбцов, равное числу ветвей электрической цепи, и число строк, равное числу ветвей п схемы замещения магнитной цепи трансформатора. Элементом этой матрицы, расположенным в k -й строке и j -м столбце, является число w_k , равное количеству витков с током j -й ветви электрической цепи i_{mj} , охватывающих k -ю ветвь схемы замещения магнитной цепи. При этом если число витков с током i_{mj} создают в k -й ветви МДС, совпадающие с выбранным положительным направлением магнитного потока, то w_k берется со знаком «плюс». В противном случае число w_k берется со знаком «минус». Для схемы замещения, приведенной на рис. 2, матрицы $[\Phi]$, $[C]$ и $[i_T]$ будут иметь следующую структуру:

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \Phi_A \\ \Phi_B \\ \Phi_C \\ \Phi_N \end{bmatrix}; \quad [C] = \begin{bmatrix} w_A & 0 & 0 & -w_a & 0 & 0 \\ 0 & w_B & 0 & 0 & -w_b & \\ 0 & 0 & w_C & 0 & 0 & -w_c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$[i_m] = [i_A \ i_B \ i_C \ i_a \ i_b \ i_c]^T.$$

С учетом (4) уравнение (3) можно записать в виде

$$[\Phi] = [\Lambda][U] + [\Lambda][C][i_T] + [J]. \quad (5)$$

Потокоцепления ветвей трансформатора определяются выражением

$$[\Psi_T] = [C]^T [\Phi] + [L_\sigma][i_m], \quad (6)$$

где элементами матрицы $[L_\sigma]$ являются само- и взаимоиндуктивности рассеяния ветвей трансформатора.

С учетом (3) – (5) выражение (6) можно записать в виде

$$\begin{aligned} [\Psi_T] &= [C]^T [\Lambda][U] + [C]^T [\Lambda][C][i_T] + [C]^T [J] + [L_\sigma][i_T] = \\ &= [L_i][i_T] + [C]^T ([\Lambda][U] + [J]), \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$[L_i] = [C]^T [\Lambda][C] + [L_\sigma]. \quad (8)$$

Напряжения ветвей трансформатора

$$[u_{вт}] = \frac{d[\Psi_T]}{dt} + [R_T][i_T] = [u_T] + [R_T][i_T], \quad (9)$$

где $[R_T]$ – диагональная матрица активных сопротивлений ветвей трансформатора; $[u_T] = \frac{d[\Psi_T]}{dt}$ – напряжения ветвей, обусловленные ЭДС само- и взаимоиндукции как главного поля, так и полей рассеяния.

Как отмечалось выше, элементы матриц $[\Lambda]$ и $[J]$, соответствующие k -й нелинейной ветви, определяются номером отрезка σ_k аппроксимированной характеристики $\Phi_k(U_{mk})$. Для всех m нелинейных ветвей схема замещения будет иметь комбинацию отрезков [2]. Обозначим через σ одну из таких комбинаций:

$$\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{k,\dots}, \sigma_m\}, \quad (10)$$

т.е. σ – такой набор отрезков, при котором σ_k ($k = 1, \dots, m$) берется для k -й нелинейной ветви.

Если комбинация отрезков σ задана, то можно считать известными все элементы матриц $[L]$ и $[J]$. При этом

$$[u_m] = [L_i] \frac{d[i_m]}{dt} + [C]^t [L] \frac{d[U]}{dt}. \quad (11)$$

Уравнения по первому закону Кирхгофа для схемы замещения магнитной цепи трансформатора можно записать в виде

$$[A][\Phi] = 0, \quad (12)$$

где $[A]$ – редуцированная матрица инцидентий [2].

Обозначим через $d + 1$ число узлов схемы замещения магнитной цепи трансформатора. Пронумеруем все узлы от 0 до d , причем через 0 обозначим тот узел, магнитный потенциал которого принят равным нулю. Ненулевые значения скалярных магнитных потенциалов узлов схемы замещения трансформатора сведем в матрицу-столбец:

$$[\varphi] = [\varphi_1 \ \varphi_2 \ \dots \ \varphi_d]^T.$$

Напряжения ветвей $[U]$ связаны с потенциалами узлов $[\varphi]$ соотношением

$$[U] = [A]^T [\varphi]. \quad (13)$$

Подставляя в (12) выражения (5) и (13), получим

$$[A][L][A]^T [\varphi] + [A][L][C][i_r] + [A][J] = 0. \quad (14)$$

Введем обозначение

$$[\Lambda_m] = [A][L][A]^T. \quad (15)$$

Размерность матрицы $[\Lambda_m]$ обычно невелика и зависит от выполнения магнитопровода трансформатора. Так для трехстержневого трансформатора (рис. 1) матрица $[\Lambda_m]$ представляет собой скаляр.

С учетом (15) магнитные потенциалы узлов $[\varphi]$ выразим через токи ветвей трансформатора $[i_m]$:

$$[\varphi] = -[\Lambda_m]^{-1} [A][\Lambda][C][i_m] - [\Lambda_m]^{-1} [A][J]. \quad (16)$$

Тогда с учетом (13)

$$\frac{d[U]}{dt} = -[A]^T [\Lambda_m]^{-1} [A][\Lambda][C] \frac{d[i_m]}{dt}. \quad (17)$$

Обозначим

$$[L_m] = [L_i] - [C]^T [\Lambda][A]^T [\Lambda_m]^{-1} [A][\Lambda][C]. \quad (18)$$

Тогда напряжения ветвей трансформатора, обусловленные ЭДС само- и взаимной индукции $[u_m]$ (11), можно выразить через производные токов ветвей:

$$[u_m] = [L_m] \frac{d[i_m]}{dt}. \quad (19)$$

Выражение (19) по виду ничем не отличается от уравнения связи между током и напряжением на линейных индуктивностях схемы замещения электрической цепи. При этом элементы матрицы $[L_m]$ имеют размерность индуктивностей и зависят от комбинации отрезков вебер-амперных характеристик σ нелинейных ветвей схемы замещения магнитной цепи трансформатора. Если комбинация отрезков σ задана, то можно считать известными все элементы матриц $[\Lambda]$, $[J]$ и $[L_m]$. Естественно, что комбинация отрезков σ зависит от значений магнитных потоков $[\Phi]$ и потенциалов $[\varphi]$ схемы замещения магнитной цепи трансформатора (которые, в свою очередь, зависят от токов ветвей $[i_m]$) и до решения уравнения (14) является неизвестной.

При моделировании несимметричных переходных процессов силового трансформатора с учетом присоединенной нагрузки будем считать известными параметры расчетной схемы замещения электрической цепи. В качестве примера рассмотрим схему замещения электрической цепи, приведенную на рис. 4, где предполагаются известными первичные линейные напряжения трехстержневого трехфазного трансформатора, об-

мотки которого соединены по схеме Δ/Y_0 (в общем случае между идеальными источниками ЭДС и первичной обмоткой трансформатора могут быть включены сопротивления), и параметры присоединенной нагрузки: активные сопротивления, конденсаторы и идеальные катушки индуктивностей. Выберем дерево графа расчетной схемы замещения электрической цепи таким образом, чтобы оно удовлетворяло следующим условиям:

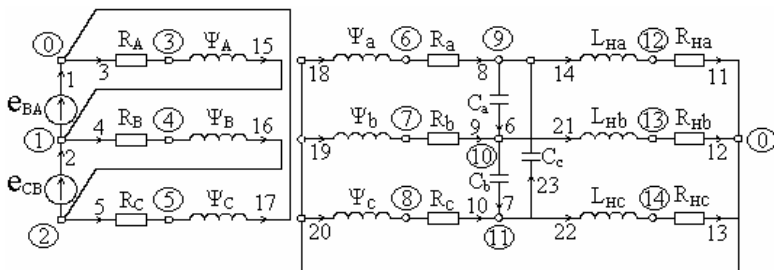


Рис 4. Расчетная схема замещения электрической цепи трансформатора

- включены все идеальные источники ЭДС (источники напряжения);
- включено максимально возможное количество конденсаторов (если они есть);
- включено минимально возможное количество катушек индуктивностей.

В зависимости от схемы соединения ветвей обмоток трансформатора часть индуктивных катушек электрической схемы замещения трансформатора может войти в дерево графа, а часть будет относиться к связям. Обозначим индексом «I» все, что относится к дереву графа, а индексом «S» все, что относится к дополняющему подграфу (связям). Тогда уравнение (19) можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} u_{mI} \\ u_{mS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{mII} & L_{mIS} \\ L_{mSI} & L_{mSS} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{mI} \\ i_{mS} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Для идеальных индуктивностей схемы замещения нагрузки уравнения связи между током и напряжением могут быть представлены следующим образом (с учетом возможных взаимоиндуктивных связей):

$$\begin{bmatrix} u_{nI} \\ u_{nS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{nII} & L_{nIS} \\ L_{nSI} & L_{nSS} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{nI} \\ i_{nS} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Уравнения (20) и (21) можно объединить в одно:

$$\begin{bmatrix} u_{mI} \\ u_{nI} \\ u_{mS} \\ u_{nS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{mII} & 0 & L_{mIS} & 0 \\ 0 & L_{nII} & 0 & L_{nIS} \\ L_{mSI} & 0 & L_{mSS} & 0 \\ 0 & L_{nSI} & 0 & L_{nSS} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{mI} \\ i_{nI} \\ i_{mS} \\ i_{nS} \end{bmatrix}$$

или

$$\begin{bmatrix} u_{LI} \\ u_{LS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{II} & L_{IS} \\ L_{SI} & L_{SS} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{LI} \\ i_{LS} \end{bmatrix}, \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} [u_{LI}] &= \begin{bmatrix} u_{mI} \\ u_{nI} \end{bmatrix}; [u_{LS}] = \begin{bmatrix} u_{mS} \\ u_{nS} \end{bmatrix}; [i_{LI}] = \begin{bmatrix} i_{mI} \\ i_{nI} \end{bmatrix}; [i_{LS}] = \begin{bmatrix} i_{mS} \\ i_{nS} \end{bmatrix}; \\ [L_{II}] &= \begin{bmatrix} L_{mII} & 0 \\ 0 & L_{nII} \end{bmatrix}; [L_{IS}] = \begin{bmatrix} L_{mIS} & 0 \\ 0 & L_{nIS} \end{bmatrix}; \\ [L_{SI}] &= \begin{bmatrix} L_{mSI} & 0 \\ 0 & L_{nSI} \end{bmatrix}; [L_{SS}] = \begin{bmatrix} L_{mSS} & 0 \\ 0 & L_{nSS} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (23)$$

С учетом (22) матрицы-столбцы напряжений и токов всех ветвей расчетной электрической схемы замещения можно представить соответственно из семи векторов:

$$\begin{aligned} [u] &= [u_{eI} \ u_{cI} \ u_{rI} \ u_{lI} \ u_{lS} \ u_{rS} \ u_{cS}]^T; \\ [i] &= [i_{eI} \ i_{cI} \ i_{rI} \ i_{lI} \ i_{lS} \ i_{rS} \ i_{cS}]^T, \end{aligned} \quad (24)$$

где векторы напряжений и токов ветвей с индексом «I» соответствуют ветвям дерева графа, а векторы напряжений и токов ветвей с индексом «S» – связям графа расчетной схемы.

На рис. 4 произведена нумерация ветвей и узлов (номера узлов обведены в кружки) в соответствии с (24). При этом ветви 1 – 14 относятся к дереву графа, а ветви 15 – 23 – к связям графа. Для катушек индуктивностей справедливо уравнение (22), а для ветвей, содержащих конденсаторы, уравнение связи между токами и напряжениями запишется в виде

$$\begin{bmatrix} i_{cI} \\ i_{cS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_I & 0 \\ 0 & C_S \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_{cI} \\ u_{cS} \end{bmatrix}, \quad (25)$$

где токи и напряжения с индексом «I» относятся к дереву графа (ветви 6, 7 на рис. 4), а токи и напряжения с индексом «S» относятся к связям графа (ветвь 23 на рис. 4).

Как известно [2], в методе переменных состояния инвариантную относительно времени расчетную схему представляют двумя уравнениями:

$$\dot{[x]} = [A_p][x] + [B_p][e]; \quad (26)$$

$$[y] = [C_p][x] + [D_p][e] + \left([D_{1p}][\dot{e}] + \dots \right), \quad (27)$$

где $[e]$ – матрица-столбец независимых источников ЭДС; $[y]$ – матрица-столбец искоемых напряжений и (или) токов ветвей; $[x]$ – матрица-столбец, содержащая независимые вспомогательные переменные; $[A_p]$, $[B_p]$, $[C_p]$, $[D_p]$, $[D_{1p}]$ – матрицы соответствующих размерностей, элементы которых определяются параметрами пассивных элементов расчетной схемы и должны быть известны на каждом шаге численного интегрирования (26).

Если в качестве переменных состояния $[x]$ принять

$$[x] = \begin{bmatrix} u_{CI} \\ i_{LS} \end{bmatrix},$$

то получение матриц $[A_p]$, $[B_p]$, $[C_p]$, $[D_p]$, $[D_{1p}]$ легко может быть автоматизировано по алгоритмам, приведенным в [2] для линейных схем. В нашем случае из-за нелинейности магнитной цепи трансформатора элементы матриц $[\Lambda]$, $[J]$ и $[L_m]$ (18) зависят от комбинаций отрезков вебер-амперных характеристик σ нелинейных ветвей схемы замещения магнитной цепи трансформатора и их нужно определять на каждом шаге численного интегрирования уравнения (26).

Решению дифференциальных уравнений производится при известных начальных условиях

$$[x(0)] = \begin{bmatrix} u_{CI}(0) \\ i_{LS}(0) \end{bmatrix},$$

которые могут быть приняты нулевыми при подключении трансформатора к сети. Кроме того, на каждом шаге численного интегрирования в текущий момент времени t при вычислении правых частей уравнения (26) переменные $[x(t)]$ являются известными и, следовательно, можно считать известными токи ветвей трансформатора $[i_m]$. Тогда потенциалы $[\varphi]$ и комбинации отрезков вебер-амперных характеристик σ схемы замещения магнитной цепи трансформатора легко можно найти из уравнения (14) кусочно-линейным методом Ньютона–Рафсона [1, 2].

Предложенная математическая модель является универсальной и позволяет анализировать переходные, установившиеся и аварийные режимы работы силовых трансформаторов с учетом их магнитной несимметрии, несимметрии питающих напряжений и присоединенной нагрузки, несимметрии обмоток трансформатора по числу витков в фазах и катушках, нелинейности ферромагнитных материалов.

Библиографический список

1. **Мартынов В.А.** Современные модели и методы расчета нелинейных электромеханических устройств. – Иваново, 2000. – 140 с.
2. **Чуа Л.О., Лин Пен-Мин.** Машинный анализ электронных схем: алгоритмы и вычислительные методы: Пер. с англ. – М.: Энергия, 1980. – 640 с.
3. **Основы теории цепей:** Учеб. для вузов / Г.В. Зевеке, П.А. Ионкин, А.В. Нетушил, С.В. Страхов. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 528 с.

УДК 621.31.004.67

Понятийные аспекты наработки при оценке ресурса электротехнического оборудования

А.Н. Назарычев, канд. техн. наук, Д.А. Андреев, асп.

Эффективность и надежность функционирования электротехнического оборудования (ЭО) электростанций, подстанций, промышленных предприятий, электрических сетей и систем электроснабжения зависит от его технического состояния [1]. Поэтому важной задачей является создание комплексного метода определения технического состояния ЭО, спо-

собного объединить разностороннюю диагностическую информацию и на этой базе рассчитать интегральную количественную характеристику технического состояния. В качестве такой интегральной характеристики предлагается параметр долговечности ЭО – технический ресурс.

Согласно [2] ресурс – это суммарная наработка объекта от начала его эксплуатации до перехода в предельное состояние, а наработка определяется как продолжительность или объем работы объекта. Предельным называется состояние объекта, при котором его дальнейшая эксплуатация должна быть прекращена из-за неустранимого нарушения требований безопасности, или неустранимого снижения уровня работоспособности, или недопустимого снижения уровня эксплуатации.

Наработка является исходным базовым понятием при трактовке определения ресурса. Правильное понимание и использование этого термина, определенное в [2], позволяет значительно расширить границы применения уже разработанных методов определения и оптимизации показателей долговечности. Кроме того, дает возможность разрабатывать общие, универсальные математические методы и модели оценки технического состояния ЭО и эффективно планировать его дальнейшую эксплуатацию.

Унификация терминологии и понятий в области диагностирования, которая устроила бы различных специалистов, невозможна [3]. Субъективное восприятие термина «наработка» часто не только является причиной его различного толкования, но может привести к неправильным выводам.

Наработка может быть измерена как в непрерывных единицах (время, энергия и т.д.), так и в дискретных (количество пусков, коммутаций и т.п.). Многими авторами понятие наработки отождествляется с понятием времени, за исключением случая с коммутационными аппаратами, когда в качестве единиц измерения наработки выступает количество коммутаций, совершенное аппаратом.

Выбор в качестве единиц измерения наработки количества коммутаций, совершенных аппаратом, обусловлен тем, что его износ определяется количеством совершенных операций, а не временем, в течение которого оборудование эксплуатировалось в стационарном режиме. Действительно, при нахождении коммутационного аппарата в статическом состоянии (даже если он находится под напряжением) процесс сработки ресурса происходит менее интенсивно, чем при выполнении отключений тока нагрузки или тока короткого замыкания. В этом случае переходное сопротивление контактов высоковольтного коммутационного аппарата постепенно увеличивается. Дуга приводит к сильному нагреву как контактной системы, так и дугогасительной камеры. Процесс сопровождается

ся эрозией расплавленных частиц металла с поверхности контактов, а также разрушением материала дугогасительной камеры. Кроме того, в процессе выполнения коммутационной операции происходит износ привода выключателя. Это подтверждается практическими данными, например, по статистике для схемы *две рабочие системы шин с обходной шиносоединительный (ШСВ), обходной (ОВ) и линейный (ЛВ) выключатели* на протяжении межремонтного периода совершают различное количество коммутаций. При проведении капитального ремонта часто обнаруживается, что техническое состояние ШСВ и ОВ оказывается намного лучше, чем состояние ЛВ, которые выполнили гораздо больше коммутаций. Отметим, что погодные условия эксплуатации выключателей в северных районах являются наиболее тяжелыми, в связи с чем в статическом состоянии выключатели подвергаются большему износу в этих районах, чем в центральных. Однако даже там техническое состояние выключателей присоединений хуже, чем ШСВ и ОВ в связи с тем, что количество коммутаций, совершенное ими за межремонтный период, отличается более чем в 2 раза. Необходимо отметить, что количество коммутаций токов в функции величины тока является основным фактором сработки ресурса выключателя, это подтверждает необходимость применения в качестве единиц измерения наработки – количества коммутаций.

Для ЭО, работающего в статических режимах (силовые трансформаторы, трансформаторы тока и напряжения, синхронные и асинхронные электродвигатели, работающие в длительных режимах), оправдан выбор временных единиц измерения наработки.

Для электродвигателей (особенно асинхронных с короткозамкнутой обмоткой ротора), работающих в повторно-кратковременных режимах, в качестве единиц измерения наработки можно принять количество пусков. Это связано с тем, что во время пуска электродвигателя, особенно с нагрузкой на валу, происходит значительный нагрев изоляции и возникают перенапряжения, которые постепенно разрушают изоляцию электродвигателя. Кроме того, при пусках происходит повышенный механический износ. Электродвигатели рассчитываются, как правило, на 6 – 7 тыс. пусков, которые могут быть выполнены как за срок службы 25 лет, так и за несколько лет до его истечения.

Сформулируем следующие рекомендации, которые должны учитываться при выборе единиц измерения наработки и ресурса ЭО.

1. Необходимо учитывать назначение ЭО.
2. Необходимо учитывать монотонный характер изменения технического состояния ЭО.

3. Единицы измерения должны характеризовать и зависеть только от типа рассматриваемого ЭО и от его технического состояния.

4. При выборе между непрерывными и дискретными единицами измерения необходимо учитывать характер режима работы ЭО.

5. Временные единицы измерения являются универсальными. К ним может быть осуществлен переход по выражению

$$H_t = \chi H, \quad (1)$$

где H_t – наработка во временных единицах измерения; H – наработка в отличных от временных единицах измерения; χ – коэффициент перехода.

Как правило, требуется переходить от дискретных единиц измерения к временным. Тогда коэффициент перехода χ является частотой событий, а в общем случае является функцией времени.

Правильное использование термина «наработка» и грамотный последующий выбор ее единиц измерения позволяют проще и рациональнее решить задачи повышения эффективности эксплуатации и оптимизации технического обслуживания и ремонта ЭО. Использование широкого (не только в единицах времени) понятия наработки позволяет вывести общие уравнения для решения задачи оценки технического состояния, а затем, при выборе объекта исследования и единицы измерения наработки, перейти к конкретным выражениям для расчета по отдельным группам ЭО.

На рис. 1 показана диаграмма сработки ресурса для случая эксплуатации ЭО в нормативных условиях. Единицы измерения наработки по оси r – ед.нар.

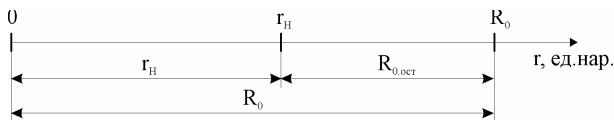


Рис. 1. Диаграмма сработки ресурса для случая эксплуатации ЭО в нормативных условиях

Исходя из определения ресурса [2] момент R_0 на оси наработки r соответствует переходу ЭО в предельное состояние. Тогда интервал наработки равен по объему нормативному ресурсу ЭО R_0 при условии, что оно всегда работало в нормативных условиях, установленных паспортными данными. Предположим, что ЭО работало в нормативных условиях на интервале от 0 до r_H и соответственно сработало ресурс в объеме r_H . Тогда остаточный нормативный ресурс определится как $R_{0,ост} = R_0 - r_H$

при условии, что после момента r_H на оси наработки r (рис. 1) ЭО будет эксплуатироваться также в нормативных условиях.

На основе приведенных рассуждений и рис. 1 сформулируем следующие определения:

- нормативный ресурс R_0 – ресурс ЭО при его работе в нормативных (расчетных, проектных) условиях (известная величина, определяемая из паспорта или технических условий на эксплуатацию соответствующего ЭО);
- нормативный остаточный ресурс $R_{0,ост}$ – ресурс ЭО, который оно сможет сработать в нормативных условиях эксплуатации с момента расчета до перехода в предельное состояние.

Износ сборочных единиц ЭО определяется режимами работы и внешними условиями эксплуатации. Поэтому при отличии условий эксплуатации от нормативных значение ресурса r_H должно быть скорректировано с учетом условий эксплуатации. Если известно, что на интервале наработки от r_H до R_0 ЭО будет работать также в условиях, отличных от нормативных, величина $R_{0,ост}$ также должна быть скорректирована с учетом условий эксплуатации. В результате корректировки получаются значения фактического сработанного ресурса R и фактического остаточного ресурса $R_{ост}$. На рис. 2 показана диаграмма сработки ресурса для случая эксплуатации ЭО в условиях, отличных от нормативных.

Оси абсцисс и ординат являются осями наработки r . По оси абсцисс откладывается наработка ЭО так, если бы оно работало в нормативных условиях эксплуатации, а по оси ординат – скорректированное значение наработки с учетом условий эксплуатации.

Предположим ЭО находится в точке r_H на оси наработки и работает в условиях, которые в целом являются облегченными по отношению к нормативным, тогда, используя условие корректировки, на оси ординат можно отложить значение наработки, соответствующее фактическому сработанному ресурсу R за наработку в объеме r_H при условиях, отличных от нормативных. Получим точку A с координатами (r_H, R) , которая характеризует сработанный ресурс ЭО r_H так, если бы оно работало в нормативных условиях, а фактический сработанный ресурс R , если бы оно сработывало в реальных условиях эксплуатации за наработку в объеме r_H .

Если ЭО далее (после точки R) будет продолжать работать в нормативных условиях эксплуатации, то нормативный остаточный ресурс определится следующим образом: $R_{0,ост} = R_0 - R$. Если же условия дальнейшей эксплуатации ЭО будут отличны от нормативных, то значение $R_{0,ост}$ также должно быть скорректировано с использованием некоторой формулы, при этом получится значение фактического остаточного ресур-

са R_{ocm} . Получим точку C с координатами $(R_0, R + R_{ocm})$ или (R_0, R_1) . Если $R_1 < R_0$, тогда, отложив на оси абсцисс точку R_1 , по формуле $R_{0,ocm.1} = R_0 - R_1$ получим следующее значение остаточного нормативного ресурса, скорректировав которое найдем следующее значение остаточного фактического ресурса $R_{ocm.1}$.

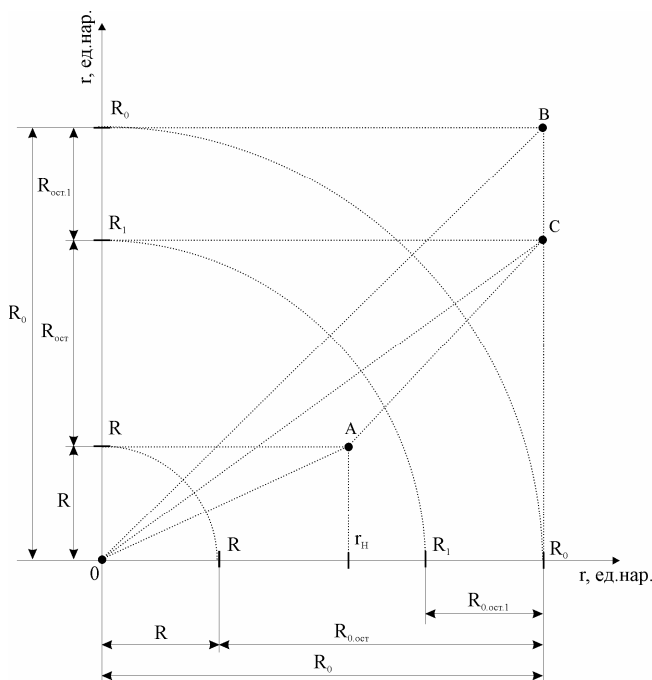


Рис. 2. Диаграмма сработки ресурса для случая эксплуатации ЭО в условиях, отличных от нормативных

На рис. 2 принято, что ЭО после точки R_1 продолжает работать в нормативных условиях эксплуатации, поэтому $R_{ocm.1} = R_{0,ocm.1}$. Если же $R_{ocm.1} > R_{0,ocm.1}$, то ЭО не сможет совершить наработку в данном случае при общих утяжеленных условиях эксплуатации, равную по объему $R_{0,ocm.1}$. Если же $R_{ocm.1} < R_{0,ocm.1}$, то ЭО сможет совершить наработку, равную и даже большую, чем $R_{0,ocm.1}$

На основании приведенных рассуждений и рис. 2 сформулируем следующие определения:

- фактический сработанный ресурс R – ресурс, срабатываемый ЭО при его работе в конкретных условиях эксплуатации;
- фактический остаточный ресурс $R_{ост}$ – ресурс ЭО, который оно сможет сработать в конкретных условиях эксплуатации с момента расчета до перехода в предельное состояние.

Для пояснения понятия «наработка» и его связи с понятиями времени и срока службы необходимо отметить, что при использовании временных единиц измерения наработки нормативный ресурс R_0 соответствует установленному сроку службы T_0 , фактический сработанный ресурс R – фактическому сроку службы T , нормативный остаточный ресурс $R_{0,ост}$ – оставшемуся времени работы ЭО до момента его перехода в предельное состояние при работе в нормативных условиях, фактический остаточный ресурс $R_{ост}$ – оставшемуся времени работы ЭО до момента перехода его в предельное состояние при работе в конкретных условиях эксплуатации.

Используя формулу (1), можно перейти от дискретных к непрерывным единицам измерения наработки (как правило, единицам измерения времени). В самом простом случае, когда дискретные операции повторяются с постоянной периодичностью, коэффициент перехода χ представляет собой частоту данных событий. В общем случае величина χ может быть не постоянной, тогда целесообразно использовать дельта-функцию $\delta(t)$ для связи дискретных единиц с непрерывными [4]:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & t > 0, \\ \text{разрыв от 0 до 1,} & t = 0. \end{cases} \quad (2)$$

При использовании выражения (2) можно получить зависимость количества операций от времени $H(t)$:

$$H(t) = \sum_{s=1}^S \delta(t - t_s), \quad (3)$$

где t_s – момент выполнения дискретной операции, а в общем случае зависимость дискретных единиц наработки от непрерывных для одного объекта (единицы ЭО) определится по формуле

$$H(H_t) = \sum_{s=1}^S \delta(H_t - H_{ts}), \quad (4)$$

где $s = 1 \dots S$ – количество дискретных операций в не зависимости от времени их выполнения; H_{ts} – точка на оси наработки (в непрерывных единицах измерения), которая соответствует выполнению дискретной операции рассматриваемой единицей ЭО. На рис. 3 приведен пример зависимости $H(H_t)$, построенной по выражению (4).

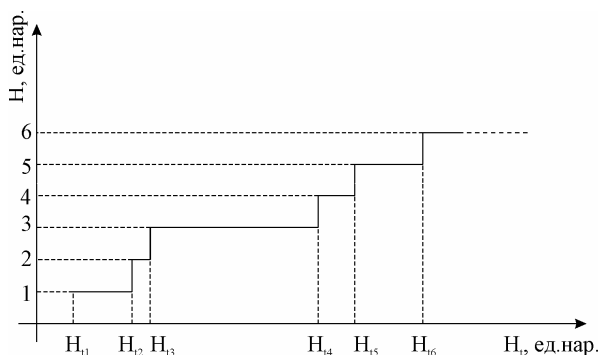


Рис. 3. Зависимость дискретных единиц наработки от непрерывных $H(H_t)$

Выражение (4) можно использовать не только для определения аналитической зависимости между непрерывными (например, временными) и дискретными (например, количеством операций) единицами измерения наработки, но и для аналитического задания режимов работы ЭО с учетом реального графика изменения эксплуатационных факторов и режимных параметров. Применение дельта-функции $\delta(t)$ позволяет производить операции интегрирования и дифференцирования с функциями, имеющими точки разрыва, например, согласно правилам, изложенным в [4]. Это дает возможность учесть все режимы работы и условия эксплуатации ЭО аналитической зависимостью и далее подставить ее в выражения для решения задач оценки технического состояния.

Для удобства вычислений, сравнения результатов расчетов по ЭО различных типов и классов напряжения, а также при учете влияния условий эксплуатации на процесс сработки ресурса ЭО целесообразно перейти к относительным единицам наработки. Для этого в качестве базового значения ресурса целесообразно выбрать нормативный ресурс R_0 , рассчитанный для нормативных условий эксплуатации. Относя все остальные значения наработки и ресурса к R_0 , можно получить относительные единицы измерения наработки.

Выводы

1. Понятие наработка не тождественно понятию времени или срока службы. Нарботка – это более широкое понятие.
2. Существует аналитическая зависимость между непрерывными и дискретными единицами измерения наработки.
3. Необходимо производить корректировку нормативного ресурса ЭО с учетом условий и режимов его эксплуатации, получая фактические значения сработанного и остаточного ресурсов.

Библиографический список

1. **Назарычев А.Н.** Методы и модели оптимизации ремонта электрооборудования объектов энергетики с учетом технического состояния / Иван. гос. энерг. ун-т. – Иваново, 2002. – 168 с.
2. **ГОСТ 27.002-89.** Надежность в технике. Термины и определения.
3. **Савельев В.А.** Оценка технического состояния и диагностирования объектов энергетики. Термины и определения // Вестник ИГЭУ. – 2003. – №2. – С. 35–40.
4. **Зельдович Я.Б.** Высшая математика для начинающих и ее приложения к физике. – М.: Наука, 1970. – 560 с.

УДК 621.31.004.67

Оптимизация межремонтных периодов электрооборудования для различных стратегий технического обслуживания и ремонта

А.Н. Назарычев, канд. техн. наук, Д.А. Андреев, Д.А. Новиков, аспиранты

В основе оптимизации периодичности ремонтов электрооборудования лежит закономерность изменения его технического состояния, связанная с конкретными суммарными затратами на эксплуатацию. Следует отметить, что в условиях перехода к рынку, в зависимости от наличия средств, затраты могут определяться договорными условиями. Поэтому в отдельных случаях может быть оправдан отказ от профилактических работ в целях поддержания или восстановления технического состояния и выбрана стратегия полной замены оборудования. Тогда справедлива постановка задачи определения оптимальной периодичности замены оборудования с учетом технического состояния.

Модели оптимизации межремонтных периодов электрооборудования с учетом технического состояния, определяемого с помощью средств технической диагностики, основаны на следующих принципах [1]:

- электрооборудование подвергается в процессе эксплуатации периодическому техническому обслуживанию, совместно с которым проводится техническая диагностика;
- по результатам технической диагностики принимается решение о целесообразности проведения предупредительных ремонтов;
- после отказа проводится послеаварийный ремонт.

В качестве характеристики технического состояния электрооборудования примем интегральный параметр – сработанный ресурс, а в качестве показателя надежности – вероятность отказа $Q(T)$ как функцию изменения технического состояния за межремонтный период и корректируемую по результатам технической диагностики.

После проведения каждого планового ремонта ресурс электротехнического оборудования (ЭО) не может быть восстановлен до начального уровня. Предположим, что после каждого ремонта ресурс ЭО падает на величину $\Delta r = \text{const}$. В связи с этим логично предположить, что огибающая интенсивности отказов по «точкам» ремонта будет выражаться формулой

$$\lambda(t) = \lambda_0 + \lambda' t, \quad (1)$$

где λ_0 – базисная интенсивность отказов, λ' – удельный прирост интенсивности отказов за счет сработки ресурса ЭО после каждого ремонта на величину Δr .

В теории надежности при определении сроков проведения профилактических работ функция вероятности отказа $Q(T)$ описывается экспоненциальной зависимостью [2, 3], так как это наиболее простой и часто используемый в практике анализа надежности и решения задач планирования ремонтов закон распределения. Кроме того, в условиях реальной эксплуатации объем статистики отказов часто бывает недостаточен для применения более сложных законов (нормального, Вейбулла, гамма-распределения и др.). При этом отличие реального закона распределения от экспоненциального приводит к несущественным погрешностям в результатах определения оптимальных сроков профилактических мероприятий. Кроме того, если сложная техническая система с восстанавливаемыми элементами, к каким относится и электрооборудование, рассматривается на более высоком иерархическом уровне как один элемент, то закон при самых общих условиях также можно считать экспоненциальным.

Принимая закон распределения вероятности безотказной работы ЭО экспоненциальным, с учетом (1), можно записать следующие выражения для определения вероятности безотказной работы и вероятности отказа:

$$P(t) = e^{-(\lambda_0 + \lambda' t)t} = e^{-\lambda_0 t} e^{-\lambda' t^2}, \quad (2)$$

$$Q(t) = 1 - e^{-\lambda_0 t} e^{-\lambda' t^2}, \quad (3)$$

где $P_1(t) = e^{-\lambda_0 t}$ – вероятность внезапных отказов; $P_2(t) = e^{-\lambda' t^2}$ – вероятность постепенных (износных) отказов за счет величины $\Delta r = \text{const} > 0$.

В качестве критерия оптимизации периодичности ремонтов выбран минимум функции средних суммарных затрат $Z(t)$ на эксплуатацию электрооборудования на энергообъекте, где установлено N единиц ЭО определенного типа. Целевая функция $Z(t)$ при реализации стратегии ремонтов электрооборудования по указанным принципам учитывает изменение технического состояния и в общем случае определяется следующими составляющими. Это:

1. Средняя стоимость планового ремонта всех единиц ЭО этого типа $C_P = C_{P,1} \cdot N$, где $C_{P,1}$ – средняя стоимость планового ремонта одной единицы ЭО данного типа. При этом считается, что все единицы ЭО данного типа были введены в эксплуатацию одновременно. Количество плановых ремонтов N_P можно определить по формуле

$$N_P = \frac{T_C - t}{t}, \quad (4)$$

где T_C – срок службы ЭО; t – периодичность ремонтов. Тогда суммарная стоимость плановых ремонтов определится по выражению

$$C_{P,\Sigma} = C_{P,1} N \frac{T_C - t}{t} = C_P \frac{T_C - t}{t}. \quad (5)$$

2. Средняя стоимость аварийных ремонтов всех N единиц ЭО данного типа $C_{ав} = C_{ав,1} \cdot N$, где $C_{ав,1}$ – средняя стоимость аварийного ремонта одной единицы ЭО данного типа. Допустим, к моменту времени t отказа-ло $n_{отк}$ единиц ЭО данного типа, тогда суммарная средняя стоимость их аварийного ремонта определится следующим образом:

$$C_{ав.Σ} = C_{ав.1}N = C_{ав} \frac{n_{омк}}{N} = C_{ав} Q(t), \quad (6)$$

где $Q(t) = n_{омк}/N$ – вероятность отказа ЭО к моменту времени t . С учетом выражения (3) стоимость аварийного ремонта определится следующим образом:

$$C_{ав.Σ} = C_{ав} \left(1 - e^{-\lambda_0 t} e^{-\lambda' t^2} \right). \quad (7)$$

3. Суммарная стоимость диагностики и обслуживания средств диагностики

$$C_{\delta.Σ} = C_{\delta.1} n_{\delta}(t) \frac{n_{\delta}(t)}{N} = C_{\delta} \frac{n_{\delta}(t)}{N} = C_{\delta} f(t), \quad (8)$$

где $C_{\delta.1}$ – средняя стоимость диагностики одной единицы ЭО; $n_{\delta}(t)$ – количество единиц ЭО, которым назначена диагностика к моменту времени t ; C_{δ} – средняя суммарная стоимость диагностики N единиц ЭО; $f(t) = n_{\delta}(t)/N$ – вероятность назначения диагностики к моменту времени t .

Ряду единиц ЭО рассматриваемого типа назначается диагностика исходя из имеющегося опыта эксплуатации, конкретных условий эксплуатации и т.д. В общем случае она может назначаться постепенно в процессе эксплуатации в связи с повышением износа ЭО. Это означает, что чем больше времени работают N единиц ЭО, тем большей части из них будет необходима диагностика.

4. Затраты на техническое обслуживание ЭО и средств диагностики, не зависящие от времени и периодичности проведения профилактических мероприятий $Z_{ТО}$.

С учетом пунктов 1 – 4 можно записать формулу средних суммарных затрат $Z(t)$ в виде

$$Z(t) = C_P \frac{T_{сл} - t}{t} + C_{ав} Q(t) + C_{\delta} f(t) + Z_{ТО}, \quad (9)$$

$$Z(t) = C_P \frac{T_{сл} - t}{t} + C_{ав} \left(1 - e^{-\lambda_0 t} e^{-\lambda' t^2} \right) + C_{\delta} f(t) + Z_{ТО}. \quad (10)$$

При назначении диагностики единицам ЭО вероятность их аварийного ремонта снижается. Если аварии полностью исключаются, то в формуле (10) необходимо скорректировать составляющую затрат на аварий-

ные ремонты на величину $(1 - f(t))$, если частично, то вероятность отказов при диагностике снижается в k раз, где $0 \leq k \leq 1$. Величина k является вероятностью обнаружения технического состояния ЭО, предшествующего аварийному переходу ЭО в предельное состояние. Поэтому в общем виде формулы (9) и (10) примут вид

$$Z(t) = C_P \frac{T_{cl} - t}{t} + (1 - f(t) + kf(t))C_{ав}Q(t) + C_{\delta}f(t) + Z_{ТО}, \quad (11)$$

$$Z(t) = C_P \frac{T_{cl} - t}{t} + C_{ав}(1 - e^{-\lambda_0 t} e^{-\lambda' t^2})(1 - f(t) + kf(t)) + C_{\delta}f(t) + Z_{ТО}. \quad (12)$$

Функция (11) является наиболее общим выражением средних суммарных затрат на эксплуатацию электрооборудования на энергообъекте, где установлено N единиц ЭО определенного типа.

Для определения оптимальной периодичности ремонтов найдем экстремумы функции (12). Для этого необходимо решить уравнение вида

$$\frac{d}{dt} Z(t) = 0. \quad (13)$$

Отметим, что после взятия производной от функции (12) по t мы получим сложное выражение, решение которого будет возможно только численными методами. Разложим экспоненциальную составляющую в окрестности точки $t = 0$ в ряд Тейлора. При этом погрешность результата будет зависеть от того, сколько членов из этого ряда мы будем использовать. По проведенным исследованиям выявлено, что целесообразно использовать первые три члена ряда Тейлора на отрезке $[0; 15]$ лет. С учетом этого получим

$$1 - e^{-\lambda_0 t} e^{-\lambda' t^2} \approx \lambda_0 t + (\lambda' - 0.5\lambda_0^2)t^2. \quad (14)$$

Подставив (14) в (11), имеем

$$Z(t) = C_P \frac{T_{cl} - t}{t} + (1 - f(t) + kf(t))C_{ав}(\lambda_0 t + (\lambda' - 0.5\lambda_0^2)t^2) + C_{\delta}f(t) + Z_{ТО}. \quad (15)$$

Выражение (15) в значительной мере определяется величиной f – вероятностью того, что по результатам технической диагностики ремонт не на-

значается. Если $f(t) = 0$, то выражение (15) характеризует затраты на эксплуатацию электрооборудования по стратегии планово-предупредительных ремонтов (ППР). Если $f(t) = 1$, то выражение (15) характеризует затраты на эксплуатацию электрооборудования, выполняемую по стратегии ремонта по техническому состоянию (СТС). Система аварийных ремонтов (САР) характеризуется отсутствием плановых ремонтов ($N_p = 0$) и технической диагностики $f(t) = 0$. Используя модель (15), можно получить модели ряда промежуточных конкурирующих стратегий (ПКС).

В [4] введена классификация стратегий ремонта ЭО в зависимости от характера появления отказов и вида стратегии ремонтов. На основе выражения (15) получены выражения суммарных затрат $Z(t)$ для стратегий ППР, САР, СТС и ПКС (табл. 1).

Таблица 1. Выражения для определения критерия оптимизации при разных стратегиях технического обслуживания и ремонта электрооборудования

Группа стратегий	Расчетные выражения для определения критерия оптимизации
ППР	$Z(t) = C_P(T_{cл} - t)/t + C_{ав}(\lambda_0 t - 0,5\lambda_0^2 t^2) + Z_{ТО}$
	$Z(t) = C_P(T_{cл} - t)/t + C_{ав}\lambda' t^2 + Z_{ТО}$
	$Z(t) = C_P(T_{cл} - t)/t + C_{ав}(\lambda_0 t + (\lambda' - 0,5\lambda_0^2) \cdot t^2) + Z_{ТО}$
САР	$Z(t) = C_{ав}(\lambda_0 t - 0,5\lambda_0^2 t^2) + Z_{ТО}$
	$Z(t) = C_{ав}\lambda' t^2 + Z_{ТО}$
	$Z(t) = C_{ав}(\lambda_0 t + (\lambda' - 0,5\lambda_0^2) \cdot t^2) + Z_{ТО}$
ПКС	$Z(t) = C_P(T_{cл} - t)/t + (1 - f(t) + kf(t))C_{ав}(\lambda_0 t - 0,5\lambda_0^2 t^2) + C_{д}f(t) + Z_{ТО}$
	$Z(t) = C_P(T_{cл} - t)/t + (1 - f(t) + kf(t))C_{ав}\lambda' t^2 + C_{д}f(t) + Z_{ТО}$
	$Z(t) = C_P(T_{cл} - t)/t + (1 - f(t) + kf(t))C_{ав}(\lambda_0 t + (\lambda' - 0,5\lambda_0^2) t^2) + C_{д}f(t) + Z_{ТО}$
СТС	$Z(t) = C_P(T_{cл} - t)/t + kC_{ав}(\lambda_0 t - 0,5\lambda_0^2 t^2) + C_{д} + Z_{ТО}$
	$Z(t) = C_P(T_{cл} - t)/t + kC_{ав}\lambda' t^2 + C_{д} + Z_{ТО}$
	$Z(t) = C_P(T_{cл} - t)/t + kC_{ав}(\lambda_0 t + (\lambda' - 0,5\lambda_0^2) t^2) + C_{д} + Z_{ТО}$

На практике желательно заранее знать оптимальные значения межремонтных периодов, которые учитывали бы реальные условия и режимы эксплуатации электрооборудования. Для этого продифференцируем уравнения (15) относительно t при постоянных значениях параметров $f, k, C_P, C_{ав}, C_{д}, Z_{ТО}, \lambda_0, \lambda'$ и $T_{cл}$:

$$\frac{dZ(t)}{dt} = -\frac{1}{t^2} [C_{KP}T_{cл} + C_{ав} (-t^2\lambda_0 - 2t^3\lambda' + t^3\lambda_0^2 + ft^2\lambda_0 + 2ft^3\lambda' - ft^3\lambda_0^2 - fkt^2\lambda_0 - 2kft^3\lambda'^2 + kft^3\lambda_0^2)]. \quad (16)$$

Преобразуем выражение (16) с помощью математического пакета MathCAD и получим

$$\frac{dZ(t)}{dt} = At^3 + Bt^2 + D, \quad (17)$$

где

$$A = 2C_{ав}\lambda' - C_{ав}\lambda_0^2 - 2C_{ав}f\lambda' + \quad (18)$$

$$+ C_{ав}f\lambda_0^2 + 2C_{ав}fk\lambda' - C_{ав}fk\lambda_0^2,$$

$$B = C_{ав}\lambda_0 - C_{ав}f\lambda_0 + C_{ав}kf\lambda_0, \quad (19)$$

$$D = -C_P T_{сл}. \quad (20)$$

Запишем и решим уравнение (13) с учетом выражения (17):

$$At^3 + Bt^2 + D = 0, \quad (21)$$

$$t^3 + \frac{B}{A}t^2 + \frac{D}{A} = 0, A \neq 0, \quad (22)$$

$$t^3 + at^2 + c = 0, \quad (23)$$

где

$$a = \frac{\lambda_0 - f\lambda_0 + kf\lambda_0}{2\lambda' - \lambda_0^2 - 2f\lambda' + f\lambda_0^2 + 2fk\lambda' - fk\lambda_0^2} = \quad (24)$$

$$= \frac{\lambda_0(1 - f + kf)}{2\lambda'(1 - f + kf) - \lambda_0^2(1 - f + kf)} = \frac{\lambda_0}{2\lambda' - \lambda_0^2},$$

$$c = \frac{C_P T_{сл}}{(1 - f + kf)C_{ав}(\lambda_0^2 - 2\lambda')}. \quad (25)$$

Воспользуемся решением Кардано для нахождения корней уравнения (23). Для этого выполним подстановку $t = y - a/3$. Тогда

$$y^3 + py + q = 0,$$

где $p = \frac{-a^2}{3}$; $q = 2\left(\frac{a}{3}\right)^3 + c$.

При этом единственный действительный корень будет

$$y = \sqrt[3]{-\left(\frac{a}{3}\right)^3 - \frac{c}{2} + \sqrt{\left(\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{-a^2}{9}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\left(\frac{a}{3}\right)^3 - \frac{c}{2} - \sqrt{\left(\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{-a^2}{9}\right)^3}}.$$

Тогда

$$t_{omn} = \sqrt[3]{-\left(\frac{a}{3}\right)^3 - \frac{c}{2} + \sqrt{\left(\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{-a^2}{9}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\left(\frac{a}{3}\right)^3 - \frac{c}{2} - \sqrt{\left(\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{-a^2}{9}\right)^3}} - \frac{a}{3}, \quad t \neq 0, \quad (26)$$

где коэффициенты a и c определяются по выражениям (24) и (25) соответственно.

Выражения для расчета коэффициентов a и c для разных стратегий ремонта сведены в табл. 2.

Таблица 2. Выражения для расчета коэффициентов a и c при разных стратегиях ТОиР электрооборудования

Группа стратегий	Расчетные выражения для определения коэффициентов a и c
ППР	$a = -1/\lambda_0; c = C_P T_{cл} / (C_{ав} \lambda_0^2)$ $a = 0; c = -C_P T_{cл} / (C_{ав} 2\lambda')$ $a = \lambda_0 / (2\lambda' - \lambda_0^2); c = C_P T_{cл} / [C_{ав} (\lambda_0^2 - 2\lambda')]$
САР	$a = -1/\lambda_0; c = 0$ $a = 0; c = 0$ $a = \lambda_0 / (2\lambda' - \lambda_0^2); c = 0$
ПКС	$a = -1/\lambda_0; c = C_P T_{cл} / [(1 - f + kf) C_{ав} \lambda_0^2]$ $a = 0; c = -C_P T_{cл} / [(1 - f + kf) C_{ав} 2\lambda']$ $a = \lambda_0 / (2\lambda' - \lambda_0^2); c = C_P T_{cл} / [(1 - f + kf) C_{ав} (\lambda_0^2 - 2\lambda')]$
СТС	$a = -1/\lambda_0; c = -C_P T_{cл} / (kf C_{ав} \lambda_0^2)$ $a = 0; c = C_P T_{cл} / [k C_{ав} 2\lambda']$ $a = \lambda_0 / (2\lambda' - \lambda_0^2); c = C_P T_{cл} / [k C_{ав} (2\lambda' - \lambda_0^2)]$

Оптимальный межремонтный период определим для следующих видов электрооборудования электростанций и подстанций: трансформаторов, выключателей и электродвигателей различных типов и классов напряжения. Для этого используется математический пакет MathCAD. Вывести выражение для определения оптимальной периодичности ремонтов t_{omn} в явном виде можно, если разложить функцию вероятности отказа в ряд Тейлора. Тогда получается более простое кубическое выражение. Для этого берутся первые три члена ряда. Погрешность результата определения оптимальной периодичности ремонтов t_{omn} зависит от того, сколько членов разложения в ряд используются. Воспользовавшись решением Кардано для нахождения корней кубического выражения, получаем значения величины t_{omn} .

Вычислительный эксперимент по определению оптимального межремонтного периода t_{omn} для различных стратегий организации ремонтов электрооборудования проведен в зависимости от изменения следующих параметров математической модели: $Q(T)$ – вероятности отказов оборудования за рассматриваемый период эксплуатации t ; ω – параметров потока отказов; λ_0 – базисной интенсивности отказов; $f(t)$ – вероятности проведения диагностирования к моменту времени t ; k – вероятности достоверной оценки технического состояния электрооборудования, предшествующего аварийному переходу оборудования в предельное состояние; $C_p/C_{ав}$ – соотношения затрат между профилактическими и аварийными ремонтами.

Оптимизация межремонтного периода t_{omn} выполняется для различных сочетаний исходных данных, стратегий ремонта и видов электрооборудования, она позволила получить графики функций $Z(t)$ и $t_{omn} = F(\lambda', \lambda_0, f, k, T_{сл}, C_p/C_{ав})$.

На рис. 1, 2, 3 в качестве примера приведены графики зависимости суммарных затрат на ремонт трансформаторов ($\lambda_0 = 0,015$ 1/год), выключателей ($\lambda_0 = 0,05$ 1/год) и двигателей ($\lambda_0 = 0,15$ 1/год) от времени для различных стратегий ремонта при следующей комбинации параметров исходных данных математической модели: $C_p/C_{ав} = 0,5$, $k = 0,5$; $C_0 = 0,01C_{ав}$; $Z_{ТО} = 0,01C_{ав}$; $T_{сл} = 25$ лет; $\lambda' = \lambda_0 0,15$.

Сравнение полученных зависимостей для трех стратегий ремонтов показывает, что применение стратегии СТС дает наибольшую величину межремонтного периода, тогда как продолжительность межремонтного периода при ППР наименьшая. Значения оптимальных межремонтных периодов для однотипного электрооборудования при различных страте-

гиях ремонта согласно графикам зависимостей, представленных на рис. 1, 2, 3, приведены в табл. 3.

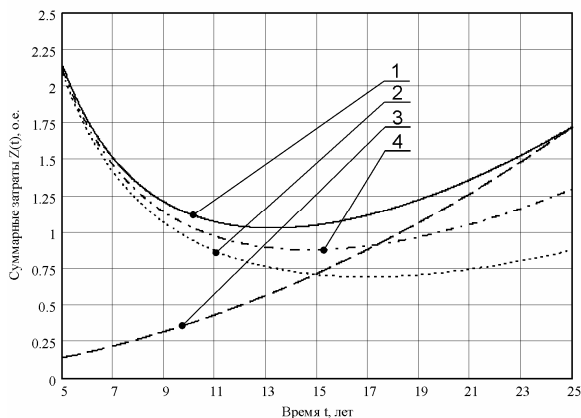


Рис. 1. Графики зависимостей суммарных затрат на проведение ТОиР для трансформаторов при стратегиях: 1 – ППР; 2 – СТС; 3 – САР; 4 – ПКС. Значения t_{opt} (лет): $t_{ППР} = 13,16$, $t_{СТС} = 16,92$, $t_{ПКС} = 14,64$

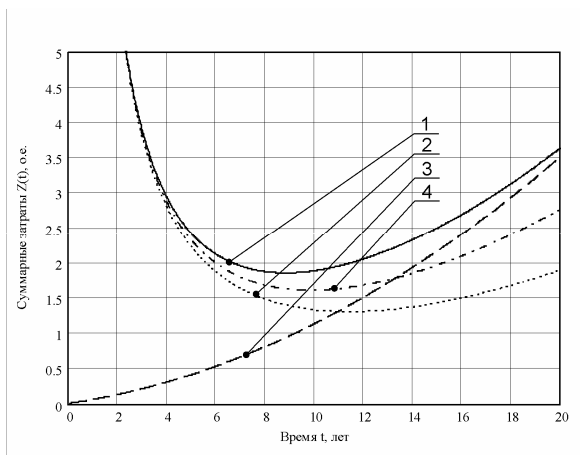


Рис. 2. Графики зависимостей суммарных затрат на проведение ТОиР для выключателей при стратегиях: 1 – ППР; 2 – СТС; 3 – САР; 4 – ПКС. Значения t_{opt} (лет): $t_{ППР} = 8,86$, $t_{СТС} = 11,38$, $t_{ПКС} = 9,82$

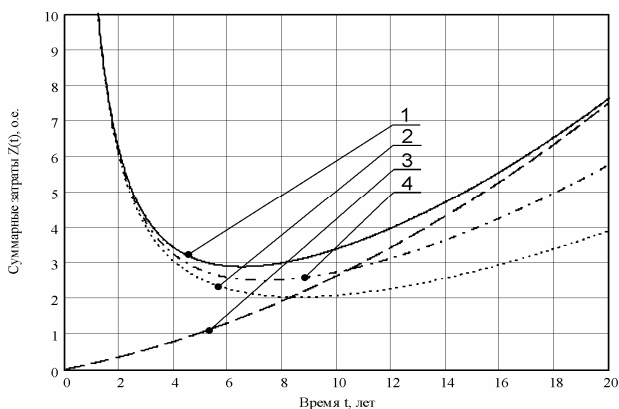


Рис. 3. Графики зависимостей суммарных затрат на проведение ТОиР для электродвигателей при стратегиях: 1 – ППР; 2 – СТС; 3 – САР; 4 – ПКС. Значения t_{opt} (лет): $t_{ППР} = 6,52$, $t_{СТС} = 8,54$, $t_{ПКС} = 7,30$

Таблица 3. Значения оптимальных межремонтных периодов электрооборудования при различных стратегиях ремонта

Электрооборудование	Оптимальный межремонтный период для стратегии (лет)		
	ППР	ПКС	СТС
Трансформаторы	13,16	14,64	16,92
Выключатели	8,86	9,82	11,38
Электродвигатели	6,52	7,30	8,54

Из рис. 1, 2, 3 видно, что стратегия САР не имеет оптимального межремонтного периода, т.к. ремонт производится по факту отказа электрооборудования. Величина t_{opt} для ПКС принимает при прочих равных условиях среднее значение, лежащее между значениями для СТС и ППР. Поэтому для сокращения объема вычислений и получения более общих выводов о характере влияния исходных данных на величину t_{opt} для различных видов электрооборудования и стратегий ремонта (ППР, СТС, ПКС и САР) целесообразно дальнейшие расчеты проводить для ПКС. Оптимальный межремонтный период t_{opt} определим для стратегии ремонта ПКС $\langle 2, 2 \rangle$, как для самой общей стратегии.

На рис. 4 – 13 приведены примеры зависимостей оптимальной периодичности ремонтов t_{opt} силовых трансформаторов, выключателей и электродвигателей от вероятности f и соотношения C_{pl}/C_{av} для различных

значений вероятности k (1 – 0,1; 2 – 0,5; 3 – 0,9) при значениях параметра потока отказов ω , приведенных в [5, 6].

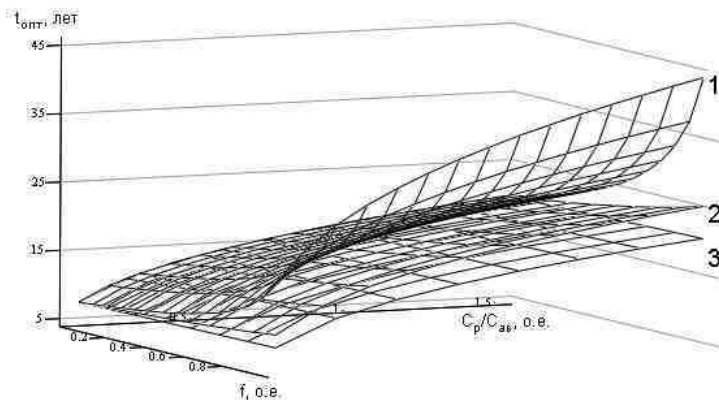


Рис. 4. Зависимости оптимальной периодичности ремонтов от вероятности f и соотношения $C_p/C_{ав}$ при значениях вероятности k 1 – 0,1; 2 – 0,5; 3 – 0,9 для трансформаторов $U_{BH} = 110$ кВ при $\omega = 0,014$ г.⁻¹

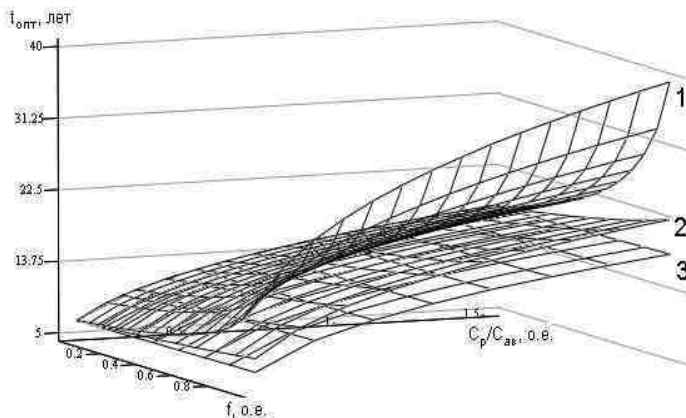


Рис. 5. Зависимости оптимальной периодичности ремонтов от вероятности f и соотношения $C_p/C_{ав}$ при значениях вероятности k 1 – 0,1; 2 – 0,5; 3 – 0,9 для трансформаторов $U_{BH} = 220$ при $\omega = 0,2$ г.⁻¹

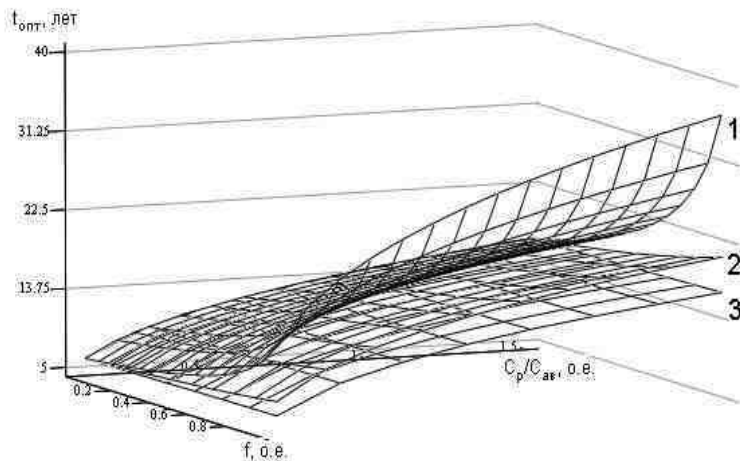


Рис. 6. Зависимости оптимальной периодичности ремонтов от вероятности f и соотношения $C_p/C_{\text{ав}}$ при значениях вероятности k 1 – 0,1; 2 – 0,5; 3 – 0,9 для трансформаторов $U_{\text{ВН}} = 330$ кВ при $\omega = 0,25$ г.⁻¹

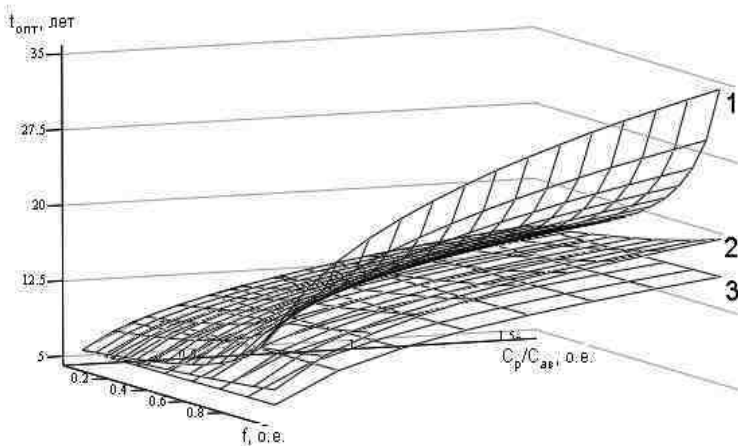


Рис. 7. Зависимости оптимальной периодичности ремонтов от вероятности f и соотношения $C_p/C_{\text{ав}}$ при значениях вероятности k 1 – 0,1; 2 – 0,5; 3 – 0,9 для трансформаторов $U_{\text{ВН}} = 500$ кВ при $\omega = 0,3$ г.⁻¹

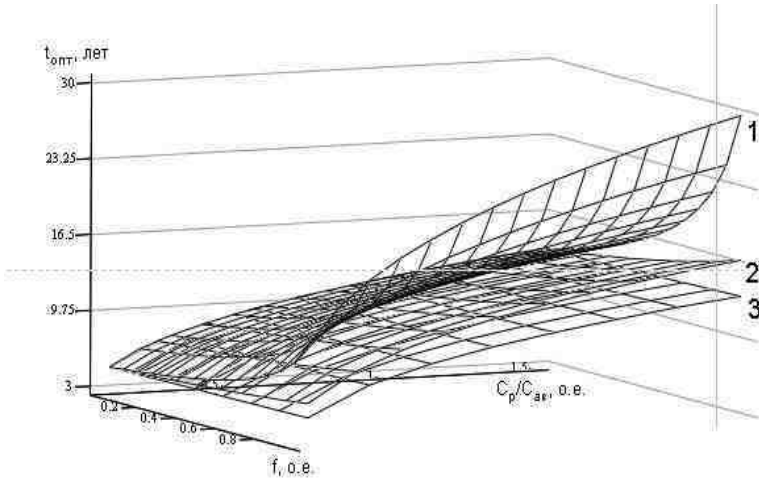


Рис. 8. Зависимости оптимальной периодичности ремонтов от вероятности f и соотношения $C_p/C_{\text{ав}}$ при значениях вероятности k 1 – 0,1; 2 – 0,5; 3 – 0,9 для маломасляных выключателей 110 кВ при $\omega = 0,05 \text{ г.}^{-1}$

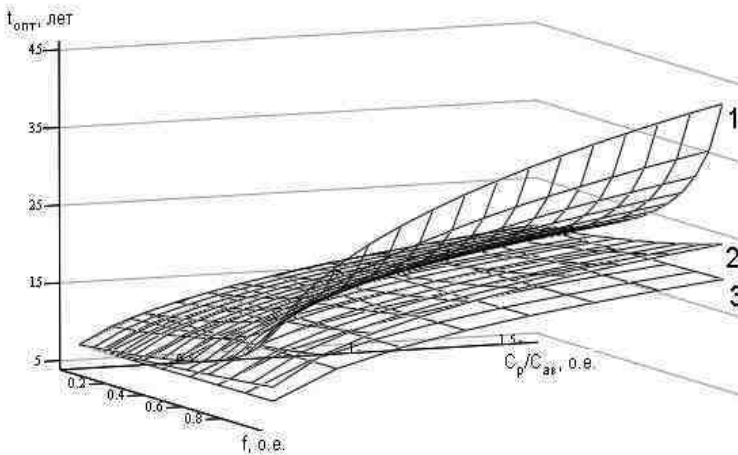


Рис. 9. Зависимости оптимальной периодичности ремонтов от вероятности f и соотношения $C_p/C_{\text{ав}}$ при значениях вероятности k 1 – 0,1; 2 – 0,5; 3 – 0,9 для масляных баковых выключателей 110 кВ при $\omega = 0,016 \text{ г.}^{-1}$

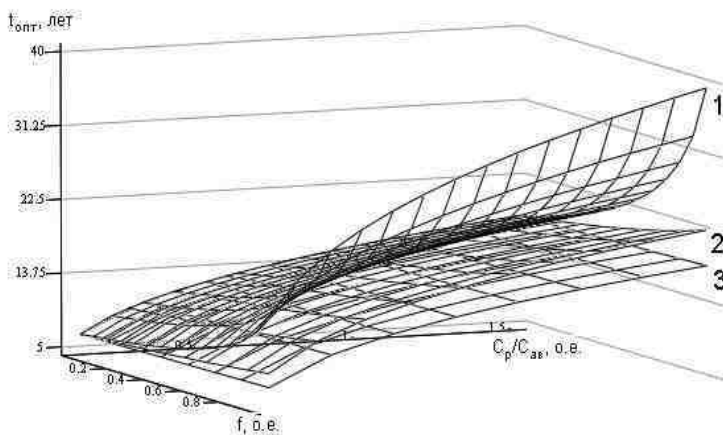


Рис. 10. Зависимости оптимальной периодичности ремонтов от вероятности f и соотношения $C_p/C_{\text{ав}}$ при значениях вероятности k 1 – 0,1; 2 – 0,5; 3 – 0,9 для воздушных выключателей 110 кВ при $\omega = 0,02 \text{ г.}^{-1}$

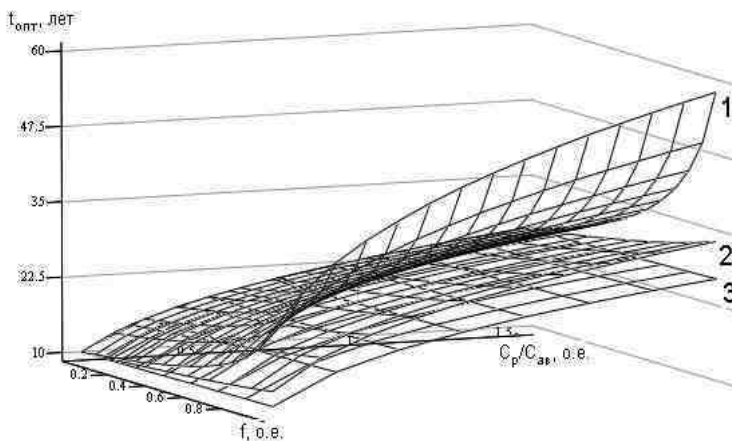


Рис. 11. Зависимости оптимальной периодичности ремонтов от вероятности f и соотношения $C_p/C_{\text{ав}}$ при значениях вероятности k 1 – 0,1; 2 – 0,5; 3 – 0,9 для элегазовых выключателей 110 кВ при $\omega = 0,006 \text{ г.}^{-1}$

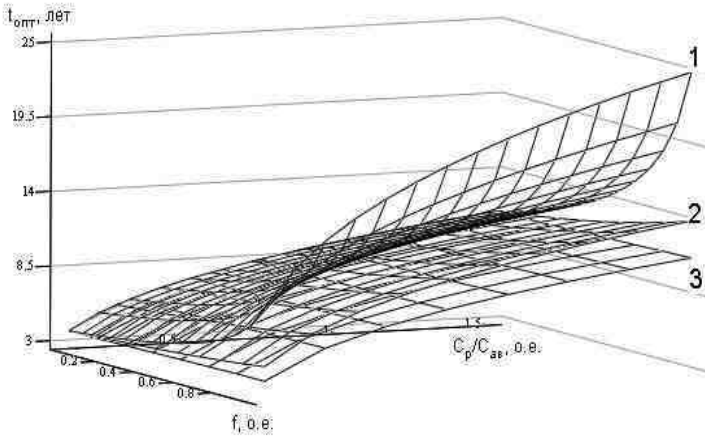


Рис. 12. Зависимости оптимальной периодичности ремонтов от вероятности f и соотношения $C_p/C_{ав}$ при значениях вероятности k 1 – 0,1; 2 – 0,5; 3 – 0,9 для электродвигателей различных типов напряжением до 1 кВ и мощностью до 2000 кВт при $\omega = 0,1 \text{ г.}^{-1}$

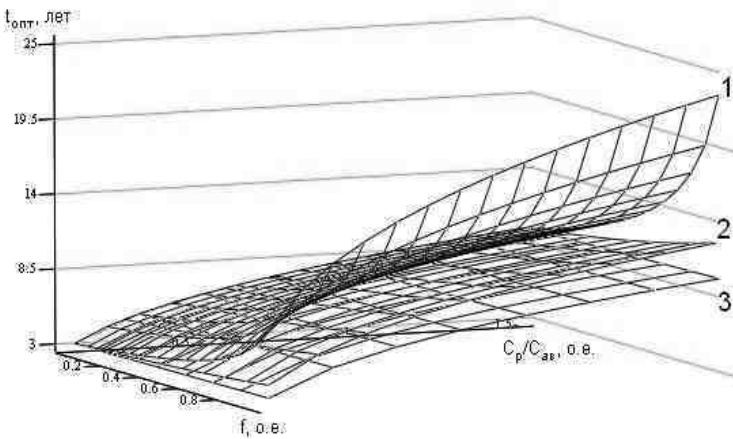


Рис. 13. Зависимости оптимальной периодичности ремонтов от вероятности f и соотношения $C_p/C_{ав}$ при значениях вероятности k 1 – 0,1; 2 – 0,5; 3 – 0,9 для электродвигателей различных типов напряжением выше 1 кВ и мощностью выше 2000 кВт при $\omega = 0,2 \text{ г.}^{-1}$

Аналогичные и другие зависимости получены для трансформаторов, выключателей и электродвигателей при различном сочетании исходных данных. Они позволили установить оптимальную периодичность ремонта t_{omn} для электрооборудования при различных параметрах математической модели.

Анализ параметров, влияющих на оптимальную периодичность ремонтов, показал, что математическая модель чувствительна прежде всего к изменению интенсивности отказов λ_0 (параметру потока отказов ω), к виду стратегии ремонтов (ППР, САР, ПКС или СТС) и к значению эксплуатационной вероятности отказов Q .

Необходимо отметить, что рассмотренные примеры построения зависимостей t_{omn} выполнены для обобщенного выражения (15).

Анализ полученных зависимостей позволяет сделать вывод о том, что продолжительность межремонтного периода минимальна при отсутствии диагностирования ($f=0$) и максимальна при его наличии ($f=1$). Степень влияния технического диагностирования на величину межремонтного периода снижается с увеличением вероятности достоверной оценки технического состояния ЭО k . Также можно отметить, что с увеличением стоимости аварийного ремонта по отношению к стоимости планового ремонта оптимальный межремонтный период увеличивается. Кроме того, с увеличением базисной интенсивности отказов λ_0 величина t_{omn} уменьшается.

В условиях неполноты исходных данных и при наличии ограничений на трудовые, материальные и временные ресурсы окончательный выбор t_{omn} производится с учетом результатов диагностирования и опыта эксплуатации. Точность определения величины t_{omn} зависит от выбора стратегии ТОиР, количества учитываемых факторов в функции цели и достоверности исходных данных, полученных с помощью средств сбора информации о техническом состоянии электрооборудования.

Выводы

1. Разработаны математические модели оптимизации межремонтных периодов электрооборудования.

2. Предложена классификация моделей для различных стратегий ремонта, учитывающая характер проявления отказов и результаты технической диагностики.

1. Проведена численная оценка влияния отдельных исходных данных на результаты вычисления оптимальной периодичности ремонтов для различных видов электрооборудования.

Библиографический список

1. Назарычев А.Н. Модели оптимизации межремонтных периодов электрооборудования с учетом результатов диагностирования // Вестник ИГЭУ. – 2001. – №1. – С. 16–20.
2. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Р. Математические методы в теории надежности. – М.: Наука, 1965. – 524 с.
3. Степанов С.В. Профилактические работы и сроки их проведения. – М.: Сов. радио, 1972. – С. 90.
4. Назарычев А.Н. Методы и модели оптимизации ремонта электрооборудования объектов энергетики с учетом технического состояния / Под ред. В.А. Савельева; Иван. гос. энерг. ун-т. – Иваново, 2002. – 168 с.
5. Гук Ю.Б. Теория надежности в электроэнергетике: Учеб. пособие для вузов. – Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1990. – 208 с.
6. Розанов М.Н. Надежность электроэнергетических систем. – М.: Энергия, 1974. – 176 с.

УДК 621.311.2

**Модель оптимизации расхода материалов
и запасных частей на ремонт электрооборудования**

А.Н. Назарычев, канд. техн. наук, Д.А. Андреев, асп.

Электрооборудование – это сложная система, состоящая из большого количества сборочных единиц. Для сокращения времени простоя оборудования в ремонте перспективным является модульный принцип замены изношенных сборочных единиц оборудования на новые запасные. Для реализации такого подхода каждое электроэнергетическое предприятие должно иметь склад запасных частей для всего перечня эксплуатируемого электрооборудования. Особенно это актуально в условиях проведения аварийных ремонтов, когда чрезвычайно выгодно максимально быстро ввести в работу отказавшее оборудование путем замены неисправных сборочных единиц. Назовем склад энергетического предприятия складом I ступени. Складом II ступени является поставщик запасных частей, например завод-изготовитель.

В условиях рыночной экономики и отсутствия дефицита запасных частей важной задачей является проблема определения оптимального запаса сменных элементов для различных типов электрооборудования. С одной стороны, число сменных элементов на складе I ступени не должно быть меньше необходимого. Необходимое количество запасных частей в

этом случае определяется тем, что при каждом отказе электрооборудования по причине отказа i -й сборочной единицы на складе должна быть ей замена. При отсутствии таковых на складе I ступени потребуются немедленная доставка со склада II ступени, что приведет к дополнительным расходам, связанным с экстренной доставкой, а также наличием ущерба (даже если есть резерв).

С другой стороны, излишнее количество запасных элементов на складе приводит к дополнительным затратам, связанным с хранением, а также в экономическом плане наблюдается негативный эффект от замораживания денежных средств. Особенно это актуально для сложного электротехнического оборудования, стоимость комплектующих для которого обычно довольно высока.

Рассмотрим механизм пополнения склада I ступени со склада II ступени. Очевидно, что поступление запасных элементов на склад I ступени происходит в соответствии с договором между энергообъектом и заводом-изготовителем с постоянной периодичностью T_{II} , которая меньше срока службы каждой конкретной сборочной единицы. Конечно, поставки могут срываться из-за особенностей рыночных отношений в России, но для крупных зарекомендовавших себя компаний поставки производятся в жесткие сроки, установленные договором. Поэтому при условии работы с такими крупными поставщиками можно считать, что период пополнения склада I ступени постоянен ($T_{II} = \text{const}$).

Каждая сборочная единица i -го типа имеет свой ресурс t_i . Таким образом, можно утверждать, что потребность в i -й сборочной единице составляет 1 шт. за время t_i или ресурс оборудования по i -й сборочной единице составляет t_i на 1 шт. Основываясь на этом утверждении, можно записать формулу для расчета оптимального количества i -х сборочных единиц для одной единицы оборудования. При этом принято допущение, что у данной единицы оборудования не может быть более одной сборочной единицы i -го типа.

$$n_i = \frac{T_{II}}{t_i}. \quad (1)$$

Следовательно, формула (1) определяет количество запасных элементов i -го типа на складе для замены одной, находящейся в работе сборочной единицы этого же типа.

Для пояснения вышеизложенных рассуждений на рис. 1 изображена временная диаграмма, поясняющая порядок пополнения склада I ступени. Данная диаграмма построена для случая, когда сборочная единица не

может быть восстановлена за срок, меньший, чем T_{II} , т.к. в ином случае достаточно лишь двух сборочных единиц: одна – в работе, другая – в резерве, либо трех: одна – в работе, одна – в резерве, одна – в ремонте.

Из рис. 1 следует, что на складе I ступени должно находиться n_i сборочных единиц. Причем к концу периода T_{II} на складе остается одна сборочная единица, т.е. при расчете по выражению (1) округление всегда должно производиться в большую сторону.

Для случая, рассмотренного на рис. 1, на складе I ступени в начале периода T_{II} должно находиться 7 запасных частей i -го типа на каждую работающую сборочную единицу этого же типа, а к концу периода T_{II} должна остаться только одна. После окончания интервала времени T_{II} пополнение осуществляется на 7 единиц, т.к. последняя запасная единица в данном периоде будет использована через интервал времени, меньший t_i относительно следующего периода, т.к. в предыдущем она уже отработала некоторое время. Данное утверждение проиллюстрировано временной диаграммой на рис. 2.

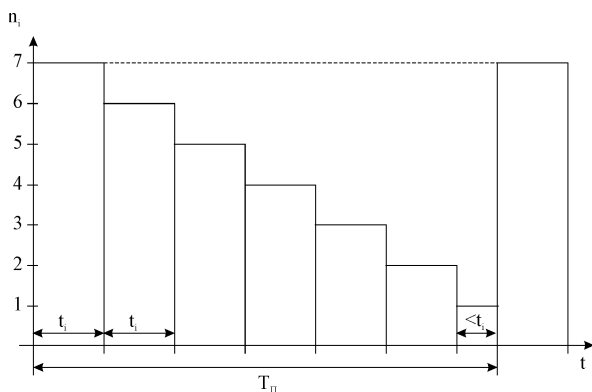


Рис. 1. Временная диаграмма расхода запасных частей на складе I ступени за период времени T_{II}

Величина t_i при решении проблемы оптимизации количества сменных элементов на складе энергопредприятия имеет временные единицы измерения (часы, дни, месяцы, годы и т.д.). Поэтому величина t_i характеризует собой наиболее вероятное время работы i -й сборочной единицы в конкретных условиях. Следует предположить, что для номинальных условий работы сборочных единиц за величину t_i можно принять установленной срок службы сборочной единицы i -го типа.

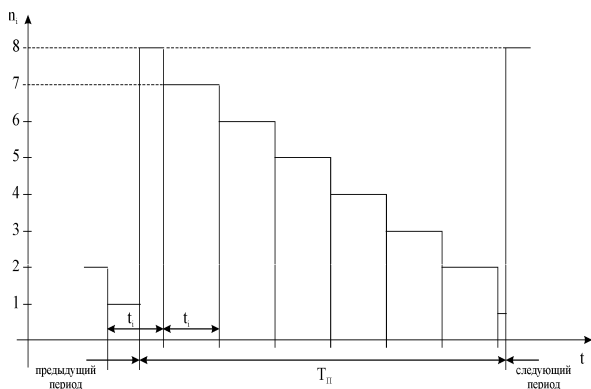


Рис. 2. Временная диаграмма пополнения склада I ступени со склада II ступени

По выражению (1) на рис. 3 построены зависимости $n_i(t_i)$ – потребности в сборочных единицах i -го типа, зависящие от их срока службы при постоянных значениях $T_{II} = \{0,1, 0,3, 0,5, 1, 2, 3, 5\}$ лет.

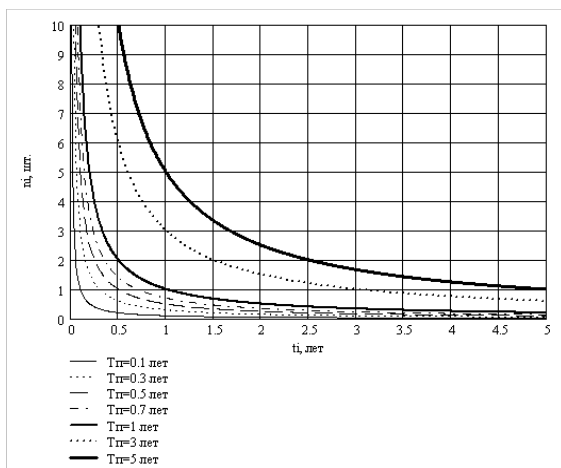


Рис. 3. Зависимости $n_i(t_i)$ при $T_{II} = \{0,1, 0,3, 0,5, 1, 2, 3, 5\}$ лет

Зная величины t_i и T_{II} , по рис. 3 можно определить, на сколько запасных элементов i -го типа должен пополняться склад I ступени в конце каждого периода T_{II} на каждую работающую сборочную единицу этого же типа.

Допустим, на энергопредприятии работает N_i единиц i -го типа, тогда вероятность отказа сборочной единицы i -го типа к моменту времени t_i определится по выражению

$$p_i(t_i) = \frac{M_i(t_i)}{N_i}, \quad (2)$$

где M_i – количество отказавших к моменту времени t_i сборочных единиц i -го типа, а количество сборочных единиц i -го типа, необходимых для замены со склада, определится по выражению

$$M_i(t_i) = p_i(t_i)N_i. \quad (3)$$

Допустим, вероятность отказов сборочных единиц i -го типа определяется экспоненциальным законом распределения:

$$p_i(t_i) = 1 - e^{-\lambda_i t_i}, \quad (4)$$

где λ_i – интенсивность отказов сборочных единиц i -го типа. Тогда выражение (3) примет вид

$$M_i(t_i) = N_i(1 - e^{-\lambda_i t_i}). \quad (5)$$

Предполагается, что остальные $(N_i - M_i(t_i))$ элементов откажут в следующие периоды времени после t_i . Однако при этом элементы $M_i(t_i)$ уже заменены на запасные со склада I ступени, поэтому для них, очевидно, замена потребует позже, чем для оставшихся $(N_i - M_i(t_i))$ элементов. В связи с этим среднее количество сборочных единиц i -го типа за каждый интервал времени для упрощения расчетов можно принять одинаковым и рассчитать по формуле (5).

Общее количество необходимых на складе I ступени запасных элементов i -го типа на момент пополнения может быть определено по выражению

$$n_i(t_i) = \frac{T_{II}}{t_i} M_i(t_i). \quad (6)$$

Подставляя (5) в (6), получаем окончательное выражение для определения общего количества запасных элементов i -го типа на складе I ступени на момент пополнения:

$$n_i(t_i) = \frac{T_{II}}{t_i} N_i \left(1 - e^{-\lambda_i t_i}\right). \quad (7)$$

Выражение (7) справедливо лишь для случая, когда отношение T_{II}/t_i принадлежит множеству натуральных чисел (1, 2, 3, ...), т.к. замена последней отказавшей в данном периоде T_{II} сборочной единицы i -го типа осуществляется в момент пополнения склада I ступени и количество запасных элемент i -го типа на складе I ступени в начале следующего периода всегда будет равно величине пополнения склада. В ином случае формула (7) примет вид

$$n_i(t_i) = \left(\frac{T_{II}}{t_i} + 1\right) N_i \left(1 - e^{-\lambda_i t_i}\right). \quad (8)$$

Из выражения (8) следует, что в начале следующего периода на складе будет оставаться один запасной элемент i -го типа с прошлого периода, а первая замена в новом периоде будет осуществляться на интервале времени до t_i , исключая t_i (см. рис. 2).

Таким образом, общая формула для расчета оптимального количества запасных элементов i -го типа на складе I ступени будет определяться выражением

$$n_i(t_i) = \begin{cases} \left(\frac{T_{II}}{t_i} + 1\right) N_i \left(1 - e^{-\lambda_i t_i}\right), & \text{когда отношение } \frac{T_{II}}{t_i} - \text{целое число;} \\ \frac{T_{II}}{t_i} N_i \left(1 - e^{-\lambda_i t_i}\right), & \text{когда отношение } \frac{T_{II}}{t_i} - \text{не целое число.} \end{cases} \quad (9)$$

Величина же пополнения склада I ступени всегда будет определяться по выражению (8). В зависимости от соотношения величин T_{II} и t_i величина запасных элементов i -го типа на складе I ступени всегда будет равна величине пополнения, рассчитываемой по выражению (8), или больше этой величины, на 1 шт.

По выражениям (7) – (9) можно построить номограммы для определения количества запасных элементов i -го типа на складе I ступени и величины пополнения. Приведем примеры таких номограмм для разных значений t_i и λ_i . Для этого запишем формулу (8) в виде

$$n_i(t_i) = T_{II} N_i A_i(t_i), \quad (10)$$

где A_i определяется по следующему выражению:

$$A_i(t_i) = \frac{1}{t_i} (1 - e^{-\lambda_i t_i}). \quad (11)$$

Пример номограмм для определения A_i представлен на рис. 4.

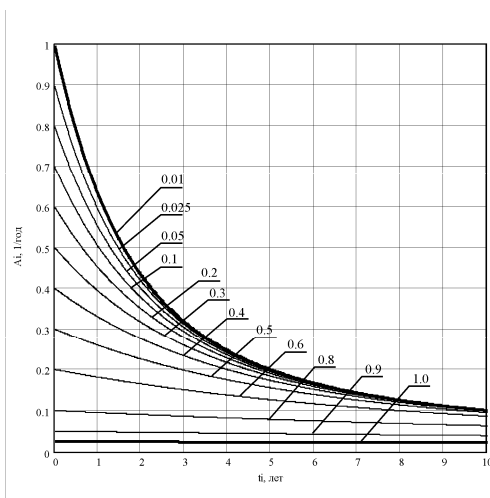


Рис. 4. Номограммы $A_i(t_i)$ для разных значений $\lambda_i = \{0,01, 0,025, 0,5, 0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,5, 0,6, 0,7, 0,8, 0,9, 1,0\} \text{ г.}^{-1}$

По номограмме на рис. 4 определяется значение A_i . Так как величины T_{II} и N_i известны и постоянны, то, произведя соответствующие вычисления по формуле (10), получим искомый результат, а именно значение n_i – величину пополнения склада I ступени.

Аналогичным образом строятся номограммы по выражениям (8) и (9) с учетом своих особенностей. По ним также определяются количества запасных элементов i -го типа на складе I ступени после пополнения со склада II ступени.

Рассмотрим величину λ_i , которая может определяться как величина, обратная сроку службы сборочной единицы i -го типа. Тогда

$$\lambda_i = \frac{1}{t_i}. \quad (12)$$

С учетом (12) выражение (7) принимает вид

$$n_i(t_i) = \frac{T_{II}}{t_i} N_i \left(1 - e^{-\frac{1}{t_i} t_i} \right) = \frac{T_{II}}{t_i} N_i \left(1 - \frac{1}{e} \right) = 0,632 \frac{T_{II}}{t_i} N_i. \quad (13)$$

При этом выражение (9) примет следующий вид:

$$n_i(t_i) = \begin{cases} 0,632 \left(\frac{T_{II}}{t_i} + 1 \right) N_i, & \text{когда отношение } \frac{T_{II}}{t_i} - \text{ целое число;} \\ 0,632 \frac{T_{II}}{t_i} N_i, & \text{когда отношение } \frac{T_{II}}{t_i} - \text{ не целое число.} \end{cases} \quad (14)$$

При этом для построения номограммы величина A_i запишется в виде

$$A_i(t_i) = \frac{0,632}{t_i}. \quad (15)$$

Номограмма, отображающая зависимость $A_i(t_i)$, приведена на рис. 5.

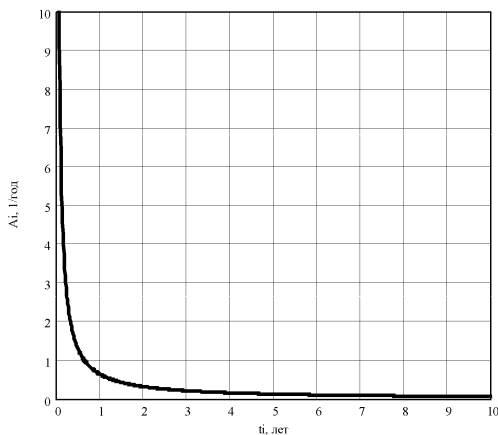


Рис. 5. Номограмма $A_i(t_i)$

Определение величины n_i также осуществляется по выражению (10). Для выражений (13) и (14) возможно построить номограммы, аналогичные номограммам рис. 5.

Следует отметить, что представленные на рис. 4 – 5 графики характерны для экспоненциального закона распределения. Однако не исключается возможность использования другого закона. Для этого в выражение (3) в качестве зависимости $p_i(t_i)$ необходимо подставить соответствующее выражение вероятности отказа i -й сборочной единицы.

Выводы

1. Предложена методика вычисления оптимального количества запасных частей сменных элементов электрооборудования на складе энергопредприятия. На ее основе разработан подход к определению величины пополнения этого склада.

2. Приведены расчетные зависимости и номограммы для определения количества запасных частей различных типов на складе энергопредприятия, а также номограммы для нахождения величины пополнения этого склада.

УДК 621.301

Надежностные и экологические аспекты работы многофазных ЛЭП

А.Н. Королев, К.В. Куликов, кандидаты техн. наук

Проблема экономичности и надежности эксплуатации мощных электросистем, а также выбора мест переработки и форм транспортировки энергоресурсов неразрывно связана с повышением качественных показателей и экологическими аспектами этих процессов. Электрическая энергия, как высокотехнологический продукт энергетики, обладает целым рядом достоинств. Одно из них заключается в вынесении из зон потребления энергии источников интенсивного неблагоприятного экологического воздействия на природу при переработке первичных энергоресурсов. Это определяет протяженность транспортных путей, и в то же время отторжение площадей отчуждения земель под ЛЭП и их неблаго-

приятное электромагнитное воздействие, наряду с экономическими сторонами передачи электрической энергии, делают необходимым поиск путей оптимизации этих факторов.

Одним из направлений повышения технико-экономических показателей ЛЭП является перевод их в многофазный режим [1, 2]. При этом увеличение числа их фаз оказывает влияние как на надежность, так и на экологические характеристики, к которым относятся максимальная напряженность электрического поля под ЛЭП и зона отчуждения земель для нее.

Исследования этих характеристик проводились на примере наиболее просто реализуемой шестифазной ЛЭП при различном пространственном расположении проводов и их конструктивном исполнении. Электрическая схема энергетической системы показана на рис. 1. Варианты пространственного расположения проводов шестифазной ЛЭП приведены на рис. 2.

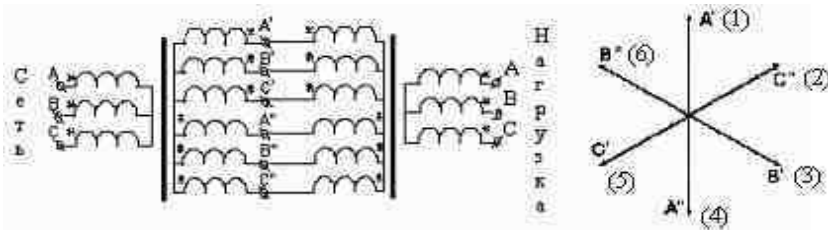


Рис. 1. Электрическая схема энергетической системы

Надежностные показатели ЛЭП связаны со снижением отрицательного влияния аварийных режимов на бесперебойность электроснабжения.

На практике аварийные режимы линий электропередач встречаются достаточно часто. Одна из возможных аварий – это обрыв или короткое замыкание на землю одного или нескольких линейных проводов. При этом трехфазная ЛЭП, как правило, становится неработоспособной и на время ремонта выводится из эксплуатации. Перевод линии электропередач в многофазный режим работы позволяет снизить негативные последствия аварийных режимов. Это связано с тем, что при обрыве или коротком замыкании одного линейного провода возможен перевод линии на работу с половинной мощностью, поскольку возможно отключение одной из трехфазных групп. В этом случае качественные показатели электроэнергии остаются неизменными. Исследования других вариантов сохранения работоспособности ЛЭП в аварийных режимах проведены на физическом макете шестифазной ЛЭП. Схема установки показана на рис. 1.

По приведенной схеме напряжение промышленной трехфазной сети преобразуется в напряжение шестифазной системы, а затем происходит обратная трансформация в стандартную трехфазную сеть, к которой подключена номинальная симметричная нагрузка. Результаты исследований сведены в табл. 1.

Таблица 1. Результаты исследования аварийных режимов в шестифазной системе

		Напряжения в относительных единицах при обрыве фаз					
		Сим.	A ^I	A ^I иB ^I	A ^I иC ^I	A ^I иB ^{II}	A ^I иC ^{II}
Фазные напряжения нагрузки	U_A	1	0,81	0,81	0,81	0,694	0,663
	U_B	1	1,05	0,809	0,809	0,579	0,563
	U_C	1	1,035	0,855	0,855	0,695	0,495

Анализируя результаты исследований, можно сделать несколько выводов. При обрыве проводов ЛЭП или при отключении отдельных фаз после короткого замыкания на землю возможна эксплуатация энергосистемы в пятифазном (при обрыве одного провода) и четырехфазном (при обрыве двух проводов) режимах. Однако в этом случае появляется составляющая обратной последовательности и качество электроэнергии снижается.

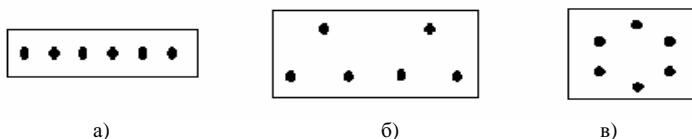


Рис. 2. Варианты пространственного расположения проводов шестифазной ЛЭП:
а – линейное, б – треугольное, в – расположение по окружности



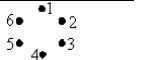
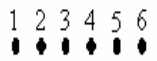
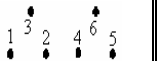
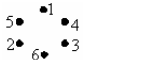
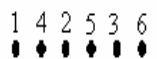
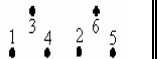
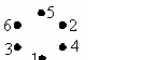
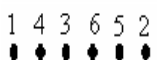
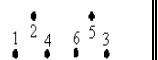
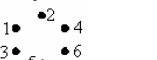
Для расчета экологических показателей использовалась разработанная на кафедре ТОЭЭ программа математического моделирования многофазных ЛЭП, реализованная в комплексе «efild».

Для расчета были приняты следующие параметры: средняя высота подвеса для всех проводов ЛЭП 10 м, фазное напряжение 191 В при числе составляющих в фазе – 2; 289 В при числе составляющих в фазе – 3 и 433 В при числе составляющих в фазе – 5. Расстояние между фазами задавалось из условия обеспечения работы ЛЭП при качании проводов.

Векторная диаграмма фазных напряжений и нумерация фаз показаны на рис. 1.

Исследуемые варианты расположения фаз в пространстве приведены в табл. 2.

Таблица 2. Варианты расположения фаз

Вариант	Рисунок	Вариант	Рисунок	Вариант	Рисунок
1		5		9	
2		6		10	
3		7		11	
4		8		12	

Расчитанные распределения напряженности электрического поля под ЛЭП для некоторых случаев рассматриваемых вариантов представлены на рис. 3.

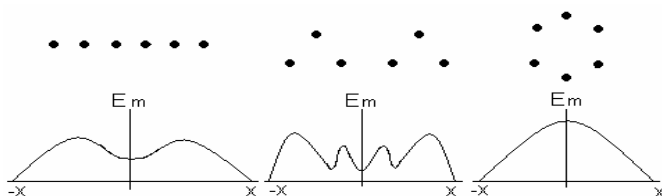


Рис. 3. Распределения напряженности электрического поля под ЛЭП

Для сравнения были проведены расчеты трехфазных ЛЭП с линейным (вариант I) и по окружности (вариант II) расположением фаз.

На рис. 4 представлены результаты исследований максимальной напряженности непосредственно под линией.

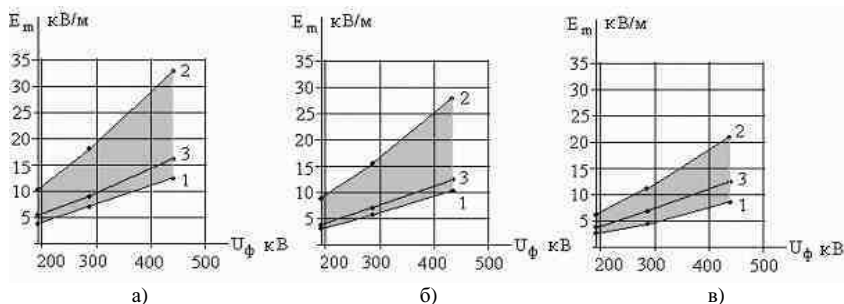


Рис. 4. Напряженность электрического поля под ЛЭП

Здесь кривые 1 и 2 – уровни максимальной напряженности поля под ЛЭП для линий, показанных на рис. 1, при различных расположениях фаз и фазных напряжениях. Зависимость 3 – уровень максимума напряженности в соответствующей трехфазной линии.

Рис. 4, а соответствует линии, с расположением проводов по рис. 2, а, 4, б – линии по рис. 2, б, 4, в – линии по рис. 2, в.

Анализ результатов расчета показывает, что многофазные ЛЭП при большей мощности, передаваемой в одном габарите, могут быть спроектированы таким образом, что один из экологических показателей – напряженность электрического поля – может быть улучшен по сравнению с таким же показателем трехфазных ЛЭП.

Другим параметром, характеризующим экологичность линий электропередач, является количество отторгаемой земли и ширина вырубаемых просек. Для оценки этого фактора было проведено сравнение передаваемой мощности на один метр земли по ширине ЛЭП. Обозначим этот параметр как $P_{уд}$ (кВт/м). Результаты сравнения для линейного расположения фаз показаны в табл. 3, для расположения в виде треугольников – в табл. 4, а для расположения фаз по окружности – в табл. 5.

Таблица 3. Результаты исследования ЛЭП с линейным расположением фаз

$U_{фн}$, В	$P_{вф}$ (max), кВт/м	$P_{вф}$ (min), кВт/м	$P_{вф}$ (3-фазн.), кВт/м
191	17,753	16,038	22,05
289	47,633	42,334	59,141
433	131,106	113,642	162,518

Таблица 4. Результаты исследования ЛЭП с расположением фаз в виде треугольников

$U_{фн}$, В	$P_{вф}$ (max), кВт/м	$P_{вф}$ (min), кВт/м	$P_{вф}$ (3-фазн.), кВт/м
191	29,081	27,216	45,412
289	77,808	70,039	122,588
433	213,161	194,192	339,612

Таблица 5. Результаты исследования ЛЭП с расположением фаз по окружности

$U_{фн}$, В	$P_{вф}$ (max), кВт/м	$P_{вф}$ (min), кВт/м	$P_{вф}$ (3-фазн.), кВт/м
191	79,539	72,185	45,412
289	217,038	193,538	122,588
433	613,221	531,923	339,612

Результаты расчетов указывают на то, что линейное и треугольное расположения проводов при обеспечении безопасного расстояния между фазами из условия учета качания проводов в пролете приводят к увеличению зоны отчуждения земли в расчете на 1 кВт передаваемой мощно-

сти. Это связано с наличием такого же промежутка между трехфазными группами в шестифазной системе, как и между проводами в трехфазной системе. При этом анализ данных указывает на то, что в шестифазной ЛЭП возможно уменьшение междуфазного расстояния из условия достижения допустимой напряженности поля на проводе, что может улучшить показатель по зоне отчужденной земли, сделав его выше показателя трехфазного варианта. Однако это потребует разработки жесткой междуфазной изоляции в пролете в целях исключения опасности пробоя воздушного промежутка при качании проводов. В то же время расположение фаз по окружности при том же междуфазном расстоянии позволяет значительно повысить рассматриваемый показатель.

Выводы

1. Увеличение числа фаз позволяет повысить надежность ЛЭП при обрыве одного или нескольких проводов.

2. Повышение надежности работы в аварийных режимах в многофазном варианте достигается за счет обеспечения передачи энергии в неполнофазных режимах.

3. Увеличение числа фаз ЛЭП с трех до шести позволяет воздействовать на распределение напряженности электрического поля под линией за счет конструктивного расположения фаз и тем самым улучшать экологичность линии. Наиболее предпочтительной по экологическим показателям является ЛЭП с расположением фаз по окружности.

4. Повышение натуральной мощности ЛЭП при увеличении числа фаз позволяет значительно уменьшить зону отчуждения земли на 1 кВт передаваемой мощности при оптимальном расположении фаз по окружности.

5. Запас по допустимой напряженности электрического поля на проводах в ряде вариантов расположения фаз ставит задачу разработки и использования дополнительной междуфазной изоляции в пролетах в целях уменьшения расстояния между фазами и оптимизации на этой основе технико-экономических и экологических характеристик ЛЭП.

Библиографический список

1. **Королев А.Н., Куликов К.В.** Число фаз как фактор оптимизации характеристик электроэнергетических систем // Межвуз. сб. науч. тр. по электротехнике / Иван. гос. ун-т. – Иваново, 1998. – С. 35.

2. **Королев А.Н., Куликов К.В., Коротков В.В.** Особенности построения многофазных линий электропередач // Повышение эффективности работы энергосистем: Тр. ИГЭУ. Вып. 4 / Под ред. В.А. Шуина, М.Ш. Мисриханова. – Иваново, 2001. – С. 108–111.

УДК 621. 313

Математическая модель магнитного поля короткозамкнутой обмотки ротора, имеющей оборванные стержни

А.А. Скоробогатов, инж.

Надежность работы электростанций во многом определяется надежностью работы вспомогательных механизмов собственных нужд, приводимых во вращение, главным образом, асинхронными двигателями (АД).

Одной из неисправностей АД с тяжелыми условиями пуска является обрыв одного или нескольких стержней ротора. Последствиями обрыва стержней могут быть механическое повреждение обмотки статора, ухудшение пусковых и рабочих характеристик машины и др.

Существующие методы проверки исправности стержней ротора АД основаны на анализе величины фазного тока статора в процессе медленного поворота ротора при питании двигателя пониженным напряжением [1], фиксации пульсаций в пусковом токе двигателя [2] либо выявлении пульсаций третьей гармоники фазного тока статора в режиме нагрузки машины [3].

Обнаружение неисправности по пульсации фазного тока статора как в режиме пуска, так и в рабочем режиме малоэффективно из-за слабости проявления эффекта и возможности влияния внешних помех. Применение метода, основанного на выявлении третьей гармоники фазного тока статора, связано с использованием специальных анализаторов и не учитывает других гармонических составляющих. Поэтому выявление наиболее информативных диагностических признаков (ДП), характеризующих данные повреждения, является актуальной задачей.

Для этого необходимо сначала провести детальное исследование магнитного поля от обмотки ротора (ОР) в воздушном зазоре АД и определить составляющую магнитного поля, в которой заложена достаточная информация о состоянии каждого стержня.

Магнитное поле от любой короткозамкнутой обмотки, уложенной в зубчатый ротор, можно представить в виде суммы двух полей. Первое наводится от той же ОР, но расположенной на гладком роторе. Второе генерируется ОР, идентичной предыдущим, но расположенной на полюсе ротора, который имеет на поверхности зубцы из электротехнической стали. Нас будет интересовать ОР, расположенная на гладком роторе.

Пусть она имеет ротор радиусом R_p и стержни прямоугольного сечения шириной b , а расстояние между ними в свету равно a . Заменим стержни бесконечно тонкими полосами той же ширины. Тогда угловая ширина полосы

$$\Delta\alpha_1 = \frac{b}{R_p}, \quad (1)$$

а угловое расстояние между полосами в свету

$$\Delta\alpha_2 = \frac{a}{R_p}. \quad (2)$$

Математическую модель зависимости линейной нагрузки (ЛН) ОР с исправными стержнями (назовем ее исправной ОР (ИОР)) от угла, измеряемого в системе координат, связанной с ротором (назовем его углом ротора), в момент времени $t = t_0$ в нормальном режиме работы АД можно представить следующим образом:

$$AS_{ИОР}(\alpha_p, t_0) = \left. \begin{aligned} & I_{pmax} \cdot \sin(p \cdot \alpha_p + 2 \cdot \pi \cdot f_c \cdot s \cdot t_0), \\ & \text{при } k \cdot (\Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2) \leq \alpha_p \leq k \cdot (\Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2) + \Delta\alpha_1, \\ & 0, \text{ при } k \cdot (\Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2) + \Delta\alpha_1 \leq \alpha_p \leq (k+1) \cdot (\Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где I_{pmax} – максимальный ток в стержнях; p – число пар полюсов; f_c – частота тока в сети; s – скольжение; $k = 0, 1, 2, \dots, Z_p$ (Z_p – число стержней ротора).

Обрыв стержня клетки ротора вне зависимости от полюсности машины приводит к перераспределению тока по стержням. Новое распределение тока согласно [4] можно представить в виде суммы первоначального тока (при отсутствии обрыва стержня) и фиктивного тока от оборванного стержня, причем в оборванном стержне фиктивный ток равен и противоположен первоначальному, что обеспечивает равенство нулю тока в оборванном стержне. Из сказанного следует, что любую реальную ОР (РОР) с поврежденными стержнями можно заменить двумя обмотками. Одна из них является ИОР. Другая является фиктивной ОР (ФОР), в которой по оборванным стержням протекают рассмотренные выше фиктивные токи, которые далее замыкаются по исправным стержням.

Тогда при обрыве стержня с номером τ_1 математическая модель зависимости ЛН РОР от угла ротора в момент времени t_0 без учета влияния обрыва на перераспределение тока в проводниках ИОР (что является допустимым при малом количестве поврежденных стержней) будет иметь следующий вид:

$$AS_{РОР}(\alpha_p, t_0) = AS_{ИОР}(\alpha_p, t_0) + AS_{ФОР}(\alpha_p, t_0), \quad (4)$$

где $AS_{ФОР}(\alpha_p, t_0)$ – зависимость ЛН ФОР от угла ротора в момент времени t_0 . Она идентична зависимости $AS_{ФОР(\tau_1)}(\alpha_p, t_0)$, в которой индекс « τ_1 » показывает, что здесь учитывается только токораспределение по ФОР от одного оборванного стержня с номером τ_1 .

$$AS_{ФОР(\tau_1)}(\alpha_p, t_0) = \left. \begin{array}{l} -I_{pmax} \cdot \sin(p \cdot \alpha_p + 2 \cdot \pi \cdot f_c \cdot s \cdot t_0) \\ \text{при } \tau_1 \cdot (\Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2) \leq \alpha_p \leq \tau_1 \cdot (\Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2) + \Delta\alpha_1; \\ 0 \text{ при } k \cdot (\Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2) + \Delta\alpha_1 \leq \alpha_p \leq (k+1) \cdot (\Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2); \\ I_{p(\tau_1)} = \frac{I_{pmax}}{\Delta\alpha_1 \cdot (Z_p - 1)} \cdot \int_{\tau_1 \cdot (\Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2)}^{\tau_1 \cdot (\Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2) + \Delta\alpha_1} \sin(p \cdot \alpha_p + 2 \cdot \pi \cdot f_c \cdot s \cdot t_0) d\alpha_p \\ \text{при } c \cdot (\Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2) \leq \alpha_p \leq c \cdot (\Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2) + \Delta\alpha_1, \end{array} \right\} \quad (5)$$

где $c = 0, 1, 2, \dots, Z_p$ и $c \neq \tau_1$.

При обрыве двух стержней с номерами τ_1 и τ_2 принимается, что математическая модель сигнала $AS_{ИОР}(\alpha_p, t_0)$ в уравнении (4) не изменяет своего вида, а $AS_{ФОР}(\alpha_p, t_0)$ описывается формулой

$$AS_{ФОР}(\alpha_p, t_0) = AS_{ФОР(\tau_1)}(\alpha_p, t_0) + AS_{ФОР(\tau_2)}(\alpha_p, t_0), \quad (6)$$

где $AS_{ФОР(\tau_2)}(\alpha_p, t_0)$ – зависимость ЛН ФОР от угла ротора, которая содержит две составляющие:

- первая показывает токораспределение от оборванного стержня с номером τ_2 по ФОР, из которой исключен стержень с номером τ_1 ;
- вторая составляющая учитывает присутствие в токе стержня с номером τ_2 до его обрыва тока, обусловленного повреждением проводника с номером τ_1 .

Обозначим вторую составляющую как $I_{p(\tau_1)}$. Тогда

$$AS_{\Phi OP(\tau_1)}(\alpha_p, t_0) = \left. \begin{array}{l} 1) -I_{pmax} \cdot \sin(p \cdot \alpha_p + 2 \cdot \pi \cdot f_c \cdot s \cdot t_0) \pm I_{p(\tau_1)} \\ \text{при } \tau_2 \cdot (\Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2) \leq \alpha_p \leq \tau_2 \cdot (\Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2) + \Delta\alpha_1; \\ 2) 0 \text{ при } k \cdot (\Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2) + \Delta\alpha_1 \leq \alpha_p \leq (k+1) \cdot (\Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2); \\ 3) I_{p(\tau_1)} = I_{p(\tau_1)} = \frac{I_{pmax}}{\Delta\alpha_1 \cdot (Z_p - 1)} \times \\ \times \left[\int_{\tau_1 \cdot (\Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2)}^{\tau_1 \cdot (\Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2) + \Delta\alpha_1} \sin(p \cdot \alpha_p + 2 \cdot \pi \cdot f_c \cdot s \cdot t_0) d\alpha_p \pm I_{p(\tau_1)} \right] \\ \text{при } c \cdot (\Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2) \leq \alpha_p \leq c \cdot (\Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2) + \Delta\alpha_1, \end{array} \right\} \quad (7)$$

где $c = 0, 1, 2, \dots, Z_p$ и $c \neq \tau_1, \tau_2$; знак «+» в уравнениях (1) и (3) системы (7) ставится, когда слагаемые уравнения (1) одного знака, а «-» – когда разного.

Общая модель зависимости $AS_{\Phi OP(\tau_2)}(\alpha_p, t_0)$ при обрыве ε числа стержней с номерами от τ_1 до τ_ε с учетом сказанного выше описывается следующей системой уравнений:

$$AS_{\Phi OP}(\alpha_p, t_0) = \sum_{i=1}^{\varepsilon} AS_{\Phi OP(\tau_i)}(\alpha_p, t_0), \quad (8)$$

где

$$AS_{\Phi OP(\tau_i)}(\alpha_p, t_0) = \left. \begin{array}{l} 1) -I_{pmax} \cdot \sin(p \cdot \alpha_p + 2 \cdot \pi \cdot f_c \cdot s \cdot t_0) + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{i-1} (\pm I_{p(\tau_j)}) \\ \text{при } \tau_i \cdot (\Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2) \leq \alpha_p \leq \tau_i \cdot (\Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2) + \Delta\alpha_1; \\ 2) 0 \text{ при } k \cdot (\Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2) + \Delta\alpha_1 \leq \alpha_p \leq (k+1) \cdot (\Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2); \\ 3) I_{p(\tau_i)} = \frac{I_{pmax}}{\Delta\alpha_1 \cdot (Z_p - i)} \times \\ \times \left[\int_{\tau_i \cdot (\Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2)}^{\tau_i \cdot (\Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2) + \Delta\alpha_1} \sin(p \cdot \alpha_p + 2 \cdot \pi \cdot f_c \cdot s \cdot t_0) d\alpha_p + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{i-1} (\pm I_{p(\tau_j)}) \right] \\ \text{при } c \cdot (\Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2) \leq \alpha_p \leq c \cdot (\Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2) + \Delta\alpha_1, \end{array} \right\} \quad (9)$$

где $c = 0, 1, 2, \dots, Z_p$ и $c \neq \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_\varepsilon$; $i = 1, 2, \dots, \varepsilon$; условия расстановки знаков «+» и «-» в уравнениях (1) и (3) системы (9) аналогичны условиям в математической модели сигнала $AS_{\text{ФОР}(\tau_2)}(\alpha_p, t_0)$.

На основе рассмотренных выше математических моделей разработан алгоритм и программа расчета токораспределений в ИОР, ФОР и РОР. На рис. 1 – 3 приведены графики распределения ЛН ИОР, ФОР и РОР по их стержням, смоделированные в математическом пакете программ Matlab 6. Вместо углов ротора по оси абсцисс отложены номера стержней n . Из рис. 2 и 3 видно, что зависимости $AS_{\text{ФОР}}(\alpha_p)$ и $AS_{\text{РОР}}(\alpha_p)$ можно принять в качестве диагностических сигналов (ДС).

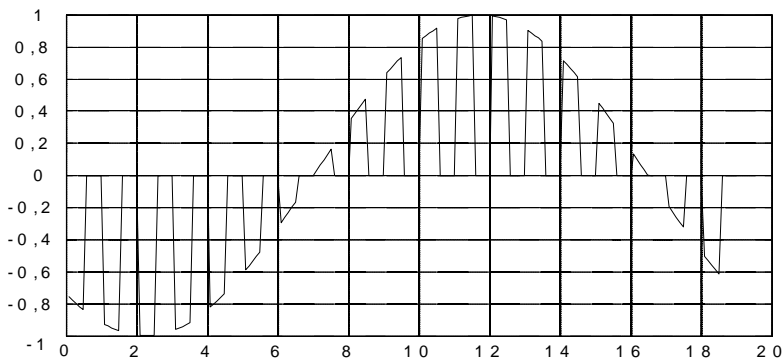


Рис. 1. Зависимость $AS_{\text{ИОР}}(n)$ при обрыве двух стержней: № 3 и 7 ($Z_p = 19, p = 1$)

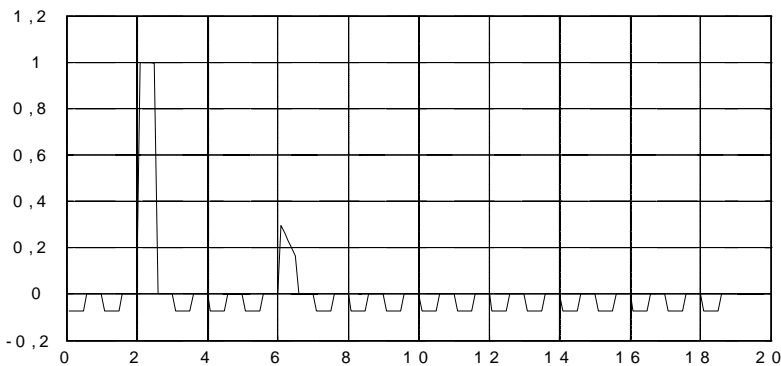


Рис. 2. Зависимость $AS_{\text{ФОР}}(n)$ при обрыве двух стержней: № 3 и 7 ($Z_p = 19, p = 1$)

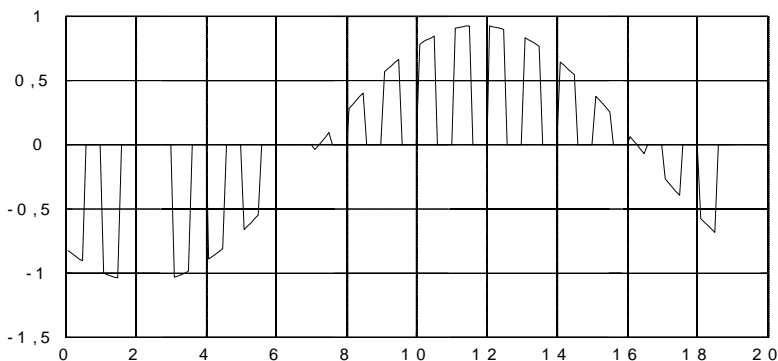


Рис. 3. Зависимость $AS_{РОР}(n)$ при обрыве двух стержней: № 3 и 7 ($Z_p = 19, p = 1$)

При вращении ротора его ЛН в точке, расположенной на поверхности ротора неподвижно относительно статора, изменяется во времени за счет как его вращения, так и периодического изменения тока в стержнях. Согласно [5] связь ЛН ОР с тангенциальной и радиальной составляющими магнитной индукции у поверхности ротора выглядит таким образом:

$$K_1 \cdot B_\alpha(t) = K_2 \frac{\partial B_\rho(t)}{\partial t} = AS(t), \quad (10)$$

где K_1 и K_2 – постоянные коэффициенты, не влияющие на форму сигналов $B_\alpha(t)$ и $\partial B_\rho(t)/\partial t$.

Так как между $B_\alpha(t)$ и $B_\rho(t)$ имеется определенная связь, то в дальнейшем рассматривается только одна из них, а именно $B_\alpha(t)$.

Согласно изложенному выше математическая модель зависимости тангенциальной составляющей магнитного поля воздушного зазора от времени за один оборот ротора получается из модели сигнала $AS(\alpha_p, t_0)$ путем замены в формулах (3), (4), (8) и (9) следующих величин: α_p на $\omega_p \cdot t$, $\Delta\alpha_1$ на $\omega_p \cdot \Delta t_1$, $\Delta\alpha_2$ на $\omega_p \cdot \Delta t_2$ и $AS(\alpha_p, t_0)$ на $B_\alpha(t)$. При этом Δt_1 – время прохождения стержнем рассматриваемой точки, Δt_2 – время прохождения зубцом рассматриваемой точки. В общем виде при числе оборотов, равном q , математическое описание магнитного поля от ОР в воздушном зазоре имеет вид

$$B_{\alpha РОР}(t) = B_{\alpha ИОР}(t) + B_{\alpha ФОР}(t), \quad (11)$$

где

$$B_{\alpha \text{ ИОР}}(t) = \left. \begin{aligned} & I_{p \max} \cdot \sin(p \cdot \omega_p \cdot t + 2 \cdot \pi \cdot f_c \cdot s \cdot t) \\ & \text{при } k_2 \cdot [k_1 \cdot (\Delta t_1 + \Delta t_2)] \leq t \leq k_2 \cdot [k_1 \cdot (\Delta t_1 + \Delta t_2) + \Delta t_1]; \\ & 0 \text{ при } k_2 \cdot [k_1 \cdot (\Delta t_1 + \Delta t_2)] + \Delta t_1 \leq t \leq k_2 \cdot [(k_1 + 1) \cdot (\Delta t_1 + \Delta t_2)], \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где $k_1 = 0, 1, 2, \dots, Z_p$; $k_2 = 1, 2, \dots, q$.

$$B_{\alpha \text{ ФОР}}(t) = \sum_{i=1}^{\varepsilon} B_{\alpha \text{ ФОР}(\tau_i)}(t), \quad (13)$$

где

$$B_{\alpha \text{ ФОР}(\tau_i)}(t) = \quad (14)$$

где $k_1 = 0, 1, 2, \dots, Z_p$; $k_2 = 1, 2, \dots, q$; $c = 0, 1, 2, \dots, Z_p$ и $c \neq \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_\varepsilon$; $i = 1, 2, \dots, \varepsilon$.

Индекс k_2 в выражении $I_{p(\tau_i, k_2)}$ показывает, что ток $I_{p(\tau_i)}$ рассчитывается на k_2 -м повороте.

На основе рассмотренных выше математических моделей разработан алгоритм и программа расчета тангенциальной составляющей магнитной индукции у поверхности гладкого ротора от токов РОР, ФОР и ИОР. Графики сигналов $B_{\alpha \text{ ФОР}}(t)$ и $B_{\alpha \text{ РОР}}(t)$ для ОР, содержащей два оборванных стержня с номерами 3 и 7 при скольжении $s = 0,05$, приведены на рис. 4 и 5.

На рисунках номер пика соответствует номеру стержня, от тока которого наводится данный пик.

Анализ графиков, полученных для обмоток, имеющих различное число и расположение оборванных стержней, которым задавались различные величины скольжения, показал:

- в результате обрыва стержня картина зависимостей $B_{\alpha \text{ РОР}}(t)$ и $B_{\alpha \text{ ФОР}}(t)$ изменяется, причем это изменение тем больше, чем больше величина ЛН ротора в рассматриваемом стержне при его исправном состоянии;
- при обрыве нескольких стержней $B_{\alpha \text{ РОР}}(t)$ будет иметь провалы в местах расположения поврежденных проводников (см. рис. 5), а $B_{\alpha \text{ ФОР}}(t)$ будет иметь пикообразные всплески (см. рис. 4);

- отсутствовать ток в стержне может только по двум причинам. Первой причиной является обрыв стержня, а второй – нахождение рассматриваемого стержня в пространстве с координатой α'_p , при которой ЛН в стержне в момент времени t_0 близка к нулю. Поэтому о состоянии этих стержней в указанный момент времени ничего сказать нельзя;

- определение состояния каждого стержня при продолжительности контроля, равном Δt_k , осуществимо при соблюдении двух условий:

$$\Delta t_k \geq \frac{1}{4 \cdot s \cdot f_c}, \quad (15)$$

так как в противном случае не для всех стержней успеют настать моменты времени, при которых токи в указанных проводниках при условии, что они целы, достигнут значений, близких к номинальному току ротора. Именно в эти моменты времени определение состояния соответствующих стержней становится наиболее достоверным;

$$s \neq \frac{k}{2 \cdot p}, \quad (16)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$, так как в противном случае стержни с токами, близкими к нулю, будут их иметь в любой момент времени.

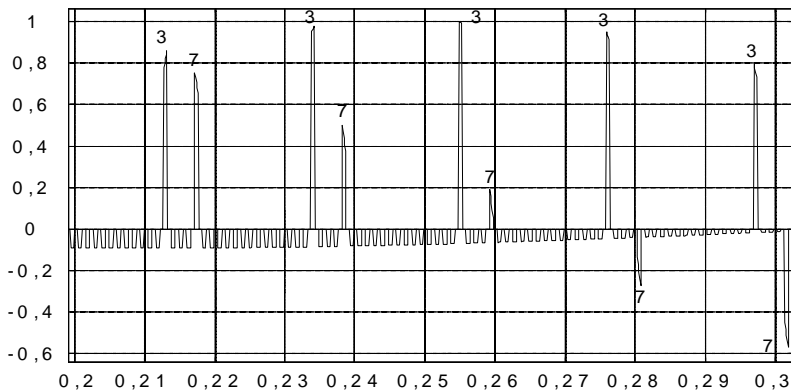


Рис. 4. Зависимость $B_{аФОР}(t)$ при обрыве двух стержней: № 3 и 7 ($Z_p = 19, p = 1$)

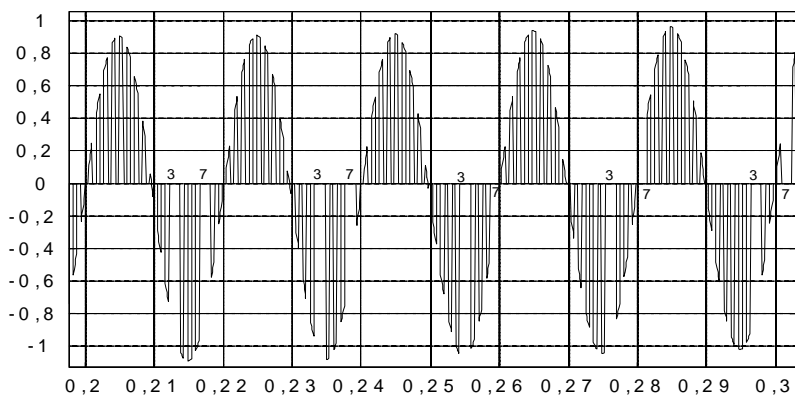


Рис. 5. Зависимость $B_{\alpha_{FOP}}(t)$ при обрыве двух стержней: № 3 и 7 ($Z_p = 19, p = 1$)

Информацию о состоянии стержней несет зависимость $B_{\alpha_{FOP}}(t)$, а зависимость $B_{\alpha_{FOP}}(t)$ является суммой данного сигнала и зависимости $B_{\alpha_{ИОР}}(t)$, не отражающей состояние проводников ОР.

Результаты математического моделирования позволили сделать следующие выводы:

- самым информативным ДС, определяющим состояние каждого стержня и его расположение по отношению к другим стержням, является зависимость вида $B_{\alpha_{FOP}}(t)$;
- источником этого сигнала является ФОР;
- самым информативным ДП обрыва является появление пика в зависимости $B_{\alpha_{FOP}}(t)$ в месте расположения поврежденного проводника.

Библиографический список

1. **Таран В.П.** Диагностирование электрооборудования. – Киев: Техника, 1983. – 200 с.
2. **Брюханов Г.А., Князев С.А.** Метод и устройство для диагностики состояния роторных обмоток асинхронных электродвигателей // Электр. станции. – 1986. – №2. – С. 44 – 45.
3. **Гашимов М.А., Аскеров Н.А.** Выявление неисправности стержней ротора асинхронных электродвигателей // Электр. станции. – 1984. – № 8. – С. 60 – 62.
4. **Волохов С.А., Добродеев П.Н., Кильдишев А.В.** Диагностирование обрыва стержня клетки ротора электродвигателя // Электротехника. – 1999. – № 2.
5. **Иванов-Смоленский А.В.** Электрические машины: Учеб. для вузов. – М.: Энергия, 1980. – 928 с.

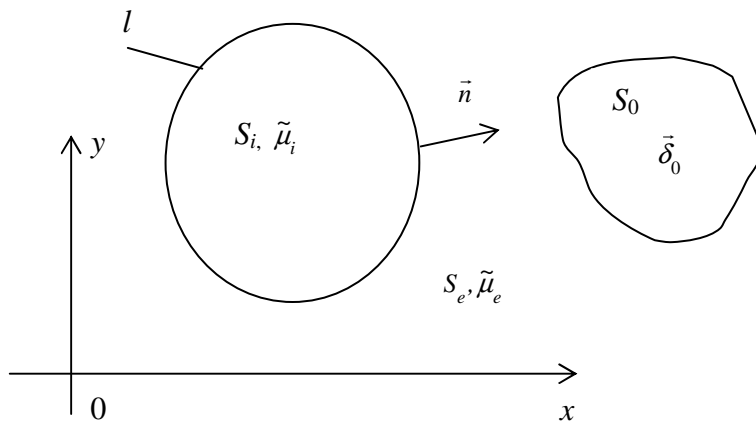
УДК 621.3.011.013

Методика расчета плоскопараллельного магнитостатического поля в анизотропной среде

С.Н. Кадников, д-р техн. наук, И.Е. Сергеева, асп.

Рассматриваются возможности применения граничных интегральных уравнений (ГИУ) для расчета поля в кусочно-однородной анизотропной линейной магнитной среде. Такая среда является, по существу, единственной эффективной моделью для расчета поля в трансформаторах и реакторах с учетом шихтовки сердечников и анизотропии трансформаторной стали. Плоскопараллельное приближение до сих пор широко применяется при расчете поля в двигателях, однако анизотропия обычно не учитывается, и поэтому задача, поставленная в данной работе, является актуальной.

Методика построения ГИУ для расчета поля в анизотропной магнитной среде будет рассмотрена применительно к модельной задаче (см. рисунок).



Геометрия и параметры модельной задачи

Длинный цилиндр из ферромагнетика с сечением S_i , ограниченный контуром l , находится во внешнем поле постоянных токов, расположенных вне S_i в области S_e и распределенных по некоторому сечению S_0 с за-

данной плотностью $\vec{\delta}_0$. Оси декартовой системы координат расположены так, что они совпадают с главными осями магнитной анизотропии. С учётом этого связь между индукцией магнитного поля \vec{B} и напряжённостью \vec{H} может быть установлена в виде

$$\vec{B} = \vec{i} \mu_x \mu_x H_x + \vec{j} \mu_y \mu_y H_y, \quad (1)$$

где μ_x, μ_y – диагональные компоненты тензора магнитной проницаемости (остальные равны нулю). Векторы вторичного поля \vec{B} и \vec{H} в областях S_i и S_e должны подчиняться уравнениям

$$\text{rot } \vec{H}_{i,e} = 0, \quad (2)$$

$$\text{div } \vec{B}_{i,e} = 0, \quad (3)$$

где $\vec{H}_i, \vec{H}_e (\vec{B}_i, \vec{B}_e)$ векторы поля в областях S_i, S_e соответственно. На границе раздела сред (магнетика и воздуха), т.е. на контуре l , должны соблюдаться граничные условия [1]:

$$[\vec{n}, \vec{H}_e - \vec{H}_i] = [\vec{n}, \vec{H}_{0i} - \vec{H}_{0e}], \quad (4)$$

$$(\vec{n}, \vec{H}_e - \tilde{\mu}_i \vec{H}_i) = (\vec{n}, \tilde{\mu}_i \vec{H}_{0i} - \vec{H}_{0e}), \quad (5)$$

где $\vec{H}_{0i}, \vec{H}_{0e}$ – векторы внешнего поля (их определение дано ниже), $\tilde{\mu}_i$ – диагональный тензор относительной магнитной проницаемости, $\tilde{\mu}_i \vec{H}_i = \vec{i} \mu_x H_x + \vec{j} \mu_y H_y$.

Для построения ГИУ, решающих краевую задачу (2) – (5), используется метод вторичных источников [1]. Однако в отличие от кусочно-однородной среды, для расчета поля в которой на границе раздела (контуре l) достаточно ввести только один вид вторичных источников – либо слой зарядов, либо слой токов, при наличии областей, заполненных анизотропной средой, необходимо вводить два вида вторичных источников, т.е. и поверхностные заряды, и токи. При этом ГИУ можно построить двумя способами – с полным [1] или частичным разделением областей.

Рассмотрим вначале первый способ. Искомый вектор вторичного поля \vec{H}_i в S_i введём посредством соотношения $\vec{H}_i = -\nabla \varphi_i$. Тогда уравне-

ние (2) в S_i будет удовлетворяться тождественно, а уравнение (3) с учётом (1) приобретет вид

$$\mu_x \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} + \mu_y \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} = 0. \quad (6)$$

Данное уравнение путём замены переменных $x = \sqrt{\mu_x} \cdot x_1$, $y = \sqrt{\mu_y} \cdot y_1$ можно свести к уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y_1^2} = 0.$$

Расположим на внутренней стороне S простой слой зарядов с плотностью σ . Тогда в области S_i потенциал

$$\varphi_{iq} = \frac{1}{2\pi} \oint_{l_i} \sigma_{1p} \ln \frac{1}{r_{1pq}} dl_{1p}, \quad (7)$$

где индекс «1» указывает на запись в переменных x_1, y_1 . После возврата к исходным переменным потенциал φ_i приобретёт вид

$$\varphi_{iq} = \frac{1}{2\pi m_i} \oint_l \sigma_p \ln \frac{1}{r_a} dl_p, \quad (8)$$

где $m_i = \sqrt{\mu_x \mu_y}$,

$$r_a = \left(\frac{(x_q - x_p)^2}{\mu_x} + \frac{(y_q - y_p)^2}{\mu_y} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (9)$$

Напряженность поля в области S_i

$$\vec{H}_{iq} = \frac{1}{2\pi m_i} \oint_l \sigma_p \frac{\vec{\mu}_i^{-1} \vec{r}}{r_a^2} dl_p, \quad (10)$$

где

$$\vec{r} = \vec{i}(x_q - x_p) + \vec{j}(y_q - y_p). \quad (11)$$

Для построения ГИУ понадобится предельное значение функции

$$(\vec{n}_q, \vec{\mu}_i \vec{H}_i) = \frac{1}{2\pi m_i} \oint_l \sigma_p \frac{(\vec{n}_q, \vec{r})}{r_a^2} dl_p \quad (12)$$

при движении точки из S_i к l по любой линии, не касательной к l . Этот предел вычисляется путём перехода к переменным x_1, y_1 , после чего выражение (12) приобретает форму

$$(\vec{n}_q, \vec{\mu}_i \vec{H}_i) = \frac{1}{2\pi} \oint_{l_1} \sigma_{1p} \frac{(\vec{n}_{1q}, \vec{r}_1)}{r_{1a}^2} dl_{1p} . \quad (13)$$

Интеграл справа есть стандартное выражение для нормальной производной потенциала простого слоя при $q \notin l$. При $q \rightarrow l$ в пределе получается [2]

$$(\vec{n}_q, \vec{\mu}_i \vec{H}_i) = -\frac{\sigma_q}{2} + \frac{1}{2\pi m_i} \oint_l \sigma_p \frac{(\vec{n}_q, \vec{r})}{r_a^2} dl_p . \quad (14)$$

Данное выражение записано в исходных переменных x, y .

Чтобы получить ГИУ второго рода, на внешней стороне l нужно разместить простой слой токов, направленных вдоль оси z , и использовать векторный потенциал

$$\vec{A}_{eq} = \frac{\mu_0}{2\pi} \oint_l \vec{i}_p \ln \frac{1}{r} dl_p , \quad (15)$$

\vec{i}_p – плотность простого слоя поверхностного тока. Напряженность поля во внешней области S_e определяется формулой $\vec{H}_e = \mu_0^{-1} \text{rot } \vec{A}_e$, что даёт

$$\vec{H}_{eq} = \frac{1}{2\pi} \oint_l \left[\vec{i}_p, \frac{\vec{r}}{r^2} \right] dl_p . \quad (16)$$

Чтобы получить первое интегральное уравнение, необходимо определить векторы внешнего поля $\vec{H}_{0i}, \vec{H}_{0e}$ в краевом условии (5). В отли-

чие от [1] здесь будет использован следующий способ задания. Во внешней области V_e вектор \vec{H}_{0e} определим с помощью формулы

$$\vec{H}_{0eq} = \frac{1}{2\pi} \int_{S_0} \left[\delta_{0p}, \frac{\vec{r}}{r^2} \right] dS_p, \quad q \in V_e. \quad (17)$$

Во внутренней зоне вектор \vec{H}_{0i} определим из условия, что все пространство заполнено однородной анизотропной средой с тензором относительной магнитной проницаемости $\tilde{\mu}_i$. Тогда вектор \vec{H}_{0i} будет в области $V_i + V_e - S_0$ подчиняться уравнению

$$\text{rot } \vec{H}_{0i} = 0, \quad (18)$$

в области S_0

$$\text{rot } \vec{H}_{0i} = \vec{\delta}_0 \quad (19)$$

и во всём пространстве уравнению

$$\text{div } \tilde{\mu}_i \vec{H}_{0i} = 0. \quad (20)$$

Далее вводится векторный потенциал

$$\tilde{\mu}_i \vec{H}_{0i} = \text{rot } \vec{A}$$

и уравнение (19) приводится к виду

$$\text{rot } \tilde{\mu}_i^{-1} \text{rot } \vec{A} = \vec{\delta}_0. \quad (21)$$

Отсюда с учётом того, что в плоскопараллельном поле вектор $\vec{A} = \vec{k}_0 A$ (имеет только одну компоненту), уравнение (21) может быть приведено к виду

$$\mu_x \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \mu_y \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = -\mu_0 \mu_x \mu_y \delta_0. \quad (22)$$

После введения новых координат $x_1 = x/\sqrt{\mu_x}$, $y_1 = y/\sqrt{\mu_y}$ (22) примет вид

$$\frac{\partial^2 A_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial y_1^2} = -\mu_0 \mu_x \mu_y \delta_{01}. \quad (23)$$

Решение этого уравнения можно выразить как

$$A_{1q} = \mu_0 \frac{\mu_x \mu_y}{2\pi} \int_{S_{01}} \delta_{01p} \ln \frac{1}{r_{1pq}} dS_{1p}, \quad (24)$$

где индекс «1» указывает на использование координат x_1, y_1 , $r_{1pq} = \sqrt{(x_{1q} - x_{1p})^2 + (y_{1q} - y_{1p})^2}$. После возврата к прежним переменным x, y

$$A_q = \mu_0 \frac{m_i}{2\pi} \int_{S_0} \delta_{0p} \ln \frac{1}{r_{pq}} dS_p, \quad (25)$$

где r_{pq} определено формулой (10). После использования формулы (20) можно найти выражение для \vec{H}_{0i} :

$$\vec{H}_{0iq} = \frac{1}{2\pi m_i} \int_{S_0} \left[\vec{\delta}_{0p}, \frac{\vec{r}}{r_{pq}^2} \right] dS_p. \quad (26)$$

Данную формулу можно рассматривать как частный случай закона Био–Савара–Лапласа для плоскопараллельного магнитного поля в линейной анизотропной среде.

После подстановки выражений (14), (16), (17), (26) в краевое условие (5) получается первое искомое интегральное уравнение:

$$\begin{aligned} \sigma_q - \frac{1}{\pi m_i} \oint_l \sigma_p \frac{(\vec{n}_q, \vec{r})}{r_a^2} dl_p - \frac{1}{\pi} \oint_l i_p \frac{(\vec{\tau}_q, \vec{r})}{r^2} dl_p = \\ = \frac{1}{\pi} \oint_l \delta_{0p} \left(\frac{-\mu_x n_x (y_q - y_p) + \mu_y n_y (x_q - x_p)}{m_i r_a^2} - \frac{(\vec{\tau}_q, \vec{r})}{r^2} \right) dl_p. \end{aligned} \quad (27)$$

В данном уравнении r_a определяется по формуле (9), а r – по формуле (11). Второй член слева является сингулярным интегралом,

как производная потенциала простого слоя [2], поскольку он может быть преобразован к виду

$$\oint_l i_p \left(\vec{\tau}_q, \nabla_q \ln \frac{1}{r} \right) dl_p = \frac{\partial}{\partial l_q} \oint_l i_p \ln \frac{1}{r} dl_p, \quad (28)$$

где $\vec{\tau}_q$ – орт-вектор касательной к l в точке q , указывающий направление обхода l , при котором область S_i остаётся слева.

Для вывода второго уравнения используется краевое условие (4) и выражение для предельного значения касательной составляющей вектора (16). Если точка q находится вне l на нормали к l , то

$$\left[\vec{n}_q, \vec{H}_{eq} \right] = \frac{1}{2\pi} \oint_l \left[\vec{n}_q \left[\vec{i}_p, \frac{\vec{r}}{r^2} \right] \right] dl_p = \frac{1}{2\pi} \oint_l \vec{i}_p \frac{(\vec{n}_q, \vec{r})}{r^2} dl_p. \quad (29)$$

Здесь была использована формула векторного анализа $\left[\vec{a} \left[\vec{b}, \vec{c} \right] \right] = b(a, c) - c(a, b)$ (a, b, c – произвольные векторы) и тот факт, что $(\vec{i}_p, \vec{n}_q) = i_p (\vec{k}_0, \vec{n}_q) = 0$. Таким образом, интеграл в (29) является производной по нормали потенциала простого слоя с плотностью \vec{i}_p . Предельное значение его на l известно:

$$\left[\vec{n}_q, \vec{H}_{eq} \right]_l = \left[\frac{1}{2\pi} \oint_l \vec{i}_p \frac{(\vec{n}_q, \vec{r})}{r^2} dl_p \right]_{q \rightarrow l} = \frac{\vec{i}_q}{2} + \frac{1}{2\pi} \oint_l \vec{i}_p \frac{(\vec{n}_q, \vec{r})}{r^2} dl_p. \quad (30)$$

После подстановки этого выражения и формулы (11) для \vec{H}_i в краевое условие (4) получается второе искомое интегральное уравнение:

$$\begin{aligned} i_q + \frac{1}{\pi} \oint_l i_p \frac{(\vec{n}_q, \vec{r})}{r^2} dl_p - \frac{1}{\pi m_i} \oint_l \sigma_p \frac{(\vec{\tau}_q, \mu_i^{-1} \vec{r})}{r_a^2} dl_p = \\ = \frac{1}{\pi} \int_{S_0} \delta_{0p} \left(\frac{(\vec{n}_q, \vec{r})}{m_i r_a^2} - \frac{(\vec{n}_q, \vec{r})}{r^2} \right) dl_p. \end{aligned} \quad (31)$$

Второй интеграл слева является сингулярным, существующим только в смысле главного значения (как и второй интеграл слева в (27)). Таким образом, искомые уравнения (27), (31) образуют систему сингулярных интегральных уравнений. Можно доказать [3], что данная система имеет единственное решение. Поэтому она может быть использована для расчёта магнитного поля в шихтованных сердечниках трансформаторов и реакторов. Численное решение такого рода систем осуществляется путём редукции к системе линейных алгебраических уравнений, которые могут решаться на ЭВМ с применением стандартных подпрограмм. Наличие сингулярных интегралов при таком способе решения затруднений не создаёт, поскольку для их аппроксимации могут применяться те же способы, что и для обычных интегралов.

Библиографический список

1. Тозони О.В., Маейргоиз И.Д. Расчёт трёхмерных электромагнитных полей. – Киев: Техника, 1974.
2. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высш. шк., 1970.
3. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. М.: Высш. шк., 1977.

УДК 621.3.011.013

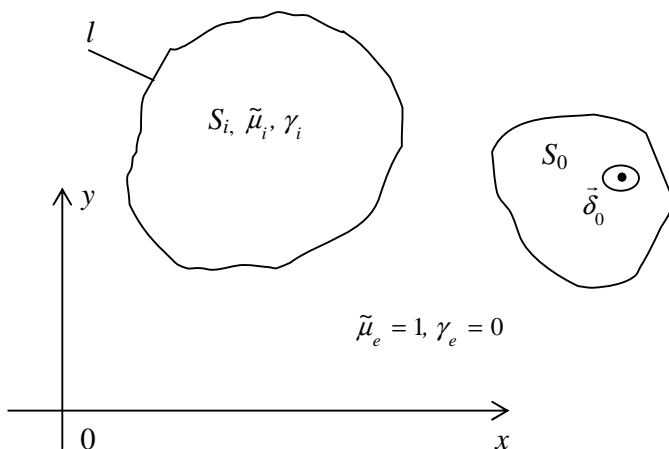
Методика расчёта плоскопараллельного квазистационарного электрического поля в анизотропной среде

С.Н. Кадников, д-р техн. наук, И.Е. Сергеева, асп.

При проектировании трансформаторов, реакторов и электрических машин возникает необходимость учёта слоистости сердечников, состоящих из листов электротехнической стали, разделённых тонкими слоями изоляции. Поскольку количество листов обычно весьма велико, то единственным, в сущности, способом расчёта поля с учётом слоистости магнитопроводов является замена слоистой среды анизотропной [1]. Такой приём может привести к появлению погрешностей как при расчёте поля, так и в особенности при расчёте активных потерь на вихревые токи. Учет влияния магнитного поля, создаваемого вихревыми токами, замыкающимися в каждом отдельном листе, от которых зависят тепловые потери,

является довольно трудным вопросом, на который можно ответить только при использовании трёхмерной модели электромагнитного поля.

При использовании плоскопараллельного приближения влияние вихревых токов, циркулирующих в пределах каждой отдельной пластины, отсутствует. Такая ситуация характерна для электрических машин, и поэтому при расчёте магнитного поля в основной рабочей части магнитопроводов двигателей и генераторов ограничиваются расчётом статического поля, поскольку продольная проводимость магнитопроводов статоров или роторов (поперёк листов) пренебрежимо мала. Однако в процессах электромагнитного нагрева анизотропных материалов (металлов) учёт вихревых токов необходим. Поэтому одной из двух наиболее универсальных будет модель, изображенная на рисунке.



Геометрия модели и ее параметры

Магнитное поле создаётся заданными токами, протекающими вдоль оси z по сечению S_0 . Область S_i , ограниченная контуром l , занимает анизотропный магнетик с диагональным тензором магнитной проницаемости $\tilde{\mu}_{ai}$ и удельной проводимостью γ_i . Требуется найти распределение магнитного поля и вихревого тока в сердечнике, т.е. в области S_i , и вне его, в области S_e .

Расчёт поля сводится к решению следующей краевой задачи:

$$\text{rot } \vec{H}_i = \gamma_i \vec{E}_i, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E}_i = -j\omega\mu_0\tilde{\mu}_i\vec{H}_i, \quad (2)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H}_e = 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E}_e = -j\omega\mu_0\vec{H}_e, \quad (4)$$

$$\left[\vec{n}, \vec{H}_e - \vec{H}_i \right] = -\left[\vec{n}, \vec{H}_{0i} - \vec{H}_{0e} \right], \quad (5)$$

$$\left(\vec{n}, \tilde{\mu}_i\vec{H}_i - \vec{H}_e \right) = \left(\vec{n}, \vec{H}_{0e} - \tilde{\mu}_i\vec{H}_{0i} \right), \quad (6)$$

где \vec{H}_i, \vec{E}_i – векторы напряженности вторичного поля (поля вторичных источников) в области S_i , \vec{H}_e, \vec{E}_e – в области S_e . Граничные условия написаны только для магнитного поля, поскольку электрическое поле магнетика будет исключено из (1), (2), (3), (4).

Для решения краевой задачи (1) – (6) путём ее сведения к системе граничных интегральных уравнений (ГИУ) используются векторный и скалярный потенциалы. В области S_i , т.е. в магнетике, искомая индукция $\vec{B}_i = \operatorname{rot} \vec{A}_i$, напряженность $\vec{H}_i = (\mu_0\tilde{\mu}_i)^{-1} \operatorname{rot} \vec{A}_i$, поскольку $\vec{B}_i = \mu_0\tilde{\mu}_i\vec{H}_i$. Произведение $\tilde{\mu}_i\vec{H}_i = \vec{i}_{0i\mu_{ix}}H_{ix} + \vec{j}_{0i\mu_{iy}}H_{iy}$ (условное обозначение). Подставляя выражение для \vec{B}_i в (2), нетрудно найти, что $\vec{E}_i = -j\omega\vec{A}_i - \nabla\varphi_i$. Электростатическая составляющая $\nabla\varphi_i$ может быть принята равной нулю, поскольку к магнитопроводу не приложено внешнее напряжение, а заряды на его боковых поверхностях в плоскопараллельном варианте продольного поля не создают, и поэтому $\vec{E}_i = -j\omega\vec{A}_i$. Подставляя это выражение, а также $\vec{H}_i = (\mu_0\tilde{\mu}_i)^{-1} \operatorname{rot} \vec{A}_i$ в (1), можно получить соотношения

$$\operatorname{rot} \left(\tilde{\mu}_i \operatorname{rot} \vec{A}_i \right) = -j\omega\mu_0\gamma_i\vec{A}_i. \quad (7)$$

После выполнения векторных операций в левой части получается уравнение

$$\mu_{ix} \frac{\partial^2 A_i}{\partial x^2} + \mu_{iy} \frac{\partial^2 A_i}{\partial y^2} - k^2 A_i = 0, \quad (8)$$

где $k^2 = j\omega\mu_0\mu_{ix}\mu_{iy}\gamma_i$. С помощью замен $x_1 = x/\sqrt{\mu_{ix}}$, $y_1 = y/\sqrt{\mu_{iy}}$ уравнение (8) может быть приведено к обычному уравнению Гельмгольца:

$$\frac{\partial^2 A_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 A_i}{\partial y_1^2} - k^2 A_i = 0. \quad (9)$$

Фундаментальным решением данного уравнения [2] является функция Макдональда $K_0(kr_1)$, где $r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$, и соответственно для уравнения (8) – $K_0(kr_{a_0})$, где $r_{a_0} = \sqrt{\frac{x^2}{\mu_{ix}} + \frac{y^2}{\mu_{iy}}}$. Известное фундаментальное решение позволяет получить интегральное представление для векторного потенциала \vec{A}_i (точнее говоря, для одной его компоненты) следующего вида:

$$A_{iq} = \frac{\mu_0 m}{2\pi} \oint_l i_p K_0(kr_a) dl_p, \quad (10)$$

где i_p – плотность простого слоя поверхностных токов, распределённых по контуру l (см. рисунок), направленных вдоль оси z ,

$$r_a = \sqrt{\frac{(x_q - x_p)^2}{\mu_{ix}} + \frac{(y_q - y_p)^2}{\mu_{iy}}}, \quad (11)$$

$m = \sqrt{\mu_{ix}\mu_{iy}}$. Назначение этой константы выясняется ниже. Выражение (10) удовлетворяет уравнению (8) в области S_i вне l . После подстановки (10) в формулу $\vec{H}_i = (\mu_0 \tilde{\mu}_i)^{-1} \text{rot } \vec{A}_i$ получается представление для \vec{H}_i (область S_i):

$$\vec{H}_{iq} = \frac{m}{2\pi} \oint_l \tilde{\mu}_i^{-1} [\nabla_q K_0(kr_a), \vec{i}_p] dl_p. \quad (12)$$

В области S_e (внешняя область), для построения ГИУ используется скалярный потенциал простого слоя зарядов:

$$\Phi_{eq} = \frac{1}{2\pi} \oint_l \sigma_p \ln \frac{1}{r} dl_p, \quad (13)$$

где

$$r = \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2}. \quad (14)$$

Полагая, что $\vec{H}_e = -\nabla\varphi_e$, можно получить представление для \vec{H}_e :

$$\vec{H}_{eq} = \frac{1}{2\pi} \oint_l \sigma_p \frac{\vec{r}}{r^2} dl_p. \quad (15)$$

Первое интегральное уравнение должно быть получено из краевого условия (5). Для этого нужно вычислить предельные значения на контуре l выражений $[\vec{n}, \vec{H}_i]$, $[\vec{n}, \vec{H}_e]$, используя представления (12) и (15). Если считать, что в выражении (12) точка q находится на нормали к l в области S_i (вне l), то

$$[\vec{n}_q, \vec{H}_{iq}] = \frac{m\tilde{\mu}_i^{-1}}{2\pi} \oint_l [\vec{n}_q [\nabla_q K_0(kr_a), \vec{i}_p]] dl_p, \quad q \notin l. \quad (16)$$

Поскольку $\vec{i}_p = \vec{k}_0 i_p$, то согласно формуле векторной алгебры $[\vec{a}[\vec{b}, \vec{c}]] = b(a, c) - c(a, b)$, после алгебраических преобразований, получим

$$[\vec{n}_q, \vec{H}_{iq}] = -\frac{1}{2\pi m} \oint_l \vec{i}_p (\tilde{\mu}_i \vec{n}_q, \nabla_q K_0(kr_a)) dl_p. \quad (17)$$

Чтобы вычислить предел этого выражения при $q \rightarrow l$ по нормали к l (изнутри l), нужно учесть, что при малом значении аргумента функция $K_0(kr_a) \cong -\ln r_a$, т.е. ведёт себя как логарифмический потенциал. Поэтому при малом r_a интеграл в (17) можно представить в виде

$$-\frac{1}{2\pi m} \oint_l \vec{i}_p \left(\tilde{\mu}_i \vec{n}_q, \nabla_q \ln \frac{1}{r_a} \right) dl_p. \quad (18)$$

После замены переменных $x = \sqrt{\mu_{ix}} \cdot x_1$, $y = \sqrt{\mu_{iy}} \cdot y_1$ этот интеграл принимает вид

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{l_1} \vec{i}_p \left(\vec{n}_{1q}, \frac{\vec{r}_1}{r_1^2} \right) dl_{1p} . \quad (19)$$

Данное выражение, записанное в координатах x_1, y_1 , есть производная по внешней нормали обычного потенциала простого слоя с векторной плотностью \vec{i}_{1p} . Её предельное значение известно [3]:

$$\lim \left[\frac{1}{2\pi} \oint_{l_1} \vec{i}_p \frac{(\vec{n}_{1q}, \vec{r}_1)}{r_1^2} dl_p \right]_{q \rightarrow l_1} = -\frac{\vec{i}_q}{2} + \frac{1}{2\pi} \oint_{l_1} \vec{i}_p \left(\frac{\vec{n}_{1q}, \vec{r}_1}{r_1^2} \right) dl_p . \quad (20)$$

В результате возврата к переменным x, y получается выражение для предельного значения $[\vec{n}_q, \vec{H}_{iq}]$ на l :

$$\lim \{ [\vec{n}_q, \vec{H}_{iq}] \}_{q \rightarrow l} = -\frac{\vec{i}_q}{2} - \frac{1}{2\pi m} \oint_{l_1} \vec{i}_p (\vec{\mu}_i \vec{n}_q, \nabla_q K_0(kr_a)) dl_p . \quad (21)$$

После подстановки данного предельного значения $[\vec{n}, \vec{H}_i]$ и $[\vec{n}, \vec{H}_e]$, где \vec{H}_e определено формулой (15), в краевое условие (5) получается первое интегральное уравнение:

$$\begin{aligned} i_q + \frac{1}{\pi m} \oint_{l_1} i_p (\vec{n}_q \vec{\mu}_i, \nabla_q K_0(kr_a)) dl_p - \frac{1}{\pi} \oint_{l_1} \sigma_p \frac{(\vec{\tau}_q, \vec{r})}{r^2} dl_p = \\ = -2(\vec{\tau}_q, \vec{H}_{0iq} - \vec{H}_{0eq}) . \end{aligned} \quad (22)$$

Второй интеграл слева является сингулярным. Вектор $\vec{\tau}$ – касательный к l , причём векторы \vec{n}, \vec{K}_0 и $\vec{\tau}$ образуют правовинтовую тройку, т.е. $\vec{\tau} = [\vec{k}_0, \vec{n}]$.

Для получения второго интегрального уравнения используется предельное значение на l проекции \vec{H}_e , определённой формулой (15), на нормаль к l согласно краевому условию (6):

$$\lim \left\{ \left[\vec{n}_q, \vec{H}_{eq} \right] \right\}_{q \rightarrow l} = \frac{\vec{\sigma}_q}{2} + \frac{1}{2\pi} \oint_l \sigma_p \frac{(\vec{n}_q, \vec{r})}{r^2} dl_p. \quad (23)$$

Подставляя данное выражение в (6), вместе с произведением $(\vec{n}, \vec{\mu}_i \vec{H}_i)$, где \vec{H}_i определено выражением (12), можно получить второе интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \sigma_q + \frac{1}{\pi} \oint_l \sigma_p \frac{(\vec{n}_q, \vec{r})}{r^2} dl_p + \frac{m}{\pi} \oint_l i_p (\vec{\tau}_p, \nabla_q K_0(kr_a)) dl_p = \\ = 2(\vec{n}_q, \vec{H}_{0eq} - \vec{\mu}_i \vec{H}_{0iq}). \end{aligned} \quad (24)$$

В данном уравнении сингулярным является второй интеграл слева. Таким образом, ГИУ (22), (24) являются системой сингулярных интегральных уравнений, что характерно для анизотропных сред.

Вектор внешнего поля \vec{H}_{0i} в области S_i определяется по формуле

$$\vec{H}_{0iq} = \frac{m}{2\pi} \int_{S_0} \vec{\mu}_i^{-1} [\nabla_q K_0(kr_a), \vec{\delta}_{0p}] dS_p. \quad (25)$$

Вектор \vec{H}_{0e} определяется по формуле

$$\vec{H}_{0eq} = \frac{1}{2\pi} \int_{S_0} \left[\nabla_q \ln \frac{1}{r}, \vec{\delta}_{0p} \right] dS_p. \quad (26)$$

Вектор \vec{H}_{0i} определён из условия, что вся среда является однородной и анизотропной с тензором проницаемости $\vec{\mu}_i$. В области S_i вектор \vec{H}_{0i} и вектор $\vec{E}_{0i} = \text{rot } \vec{H}_{0i}$ удовлетворяют уравнениям (1), (2). Вектор \vec{H}_{0e} определён из условия, что вся среда является однородной и изотропной с проницаемостью $\mu_e = 1$. Если в исходной краевой задаче заменить магнетик воздухом, правые части (22), (24) обратятся в нуль, что естественно с физической точки зрения. Этим данная модель отличается от предложенной в [4], где проведено полное разделение областей, т.е. внешнее поле определено только в области S_e . В результате даже в однородной среде, когда во всём пространстве остаётся только внешнее поле, в области S_i оно должно

быть получено как решение системы интегральных уравнений, что, безусловно, приведёт к ухудшению вычислительных свойств модели.

Чтобы показать возможность использования системы (22), (24) для вычислительных целей, необходимо доказать единственность её решения. Для этого следует считать краевые условия (5), (6) однородными. Умножим скалярно условие (5) на векторный потенциал \vec{A}_i^* (* – знак комплексного сопряжения) и проинтегрируем по контуру l . После изменения порядка сомножителей в смешанных векторных произведениях получается

$$\oint_l \left(\left[\vec{H}_i, \vec{A}_i^* \right], \vec{n} \right) dl - \oint_l \left(\left[\vec{H}_e, \vec{A}_i^* \right], \vec{n} \right) dl = 0. \quad (27)$$

После использования формул $\vec{H}_e = -\nabla\varphi_e$, $\vec{B}_i^* = \text{rot } \vec{A}_i^*$, $\text{div} \left[\vec{H}_i, \vec{A}_i^* \right] = \left(\vec{A}_i^*, \text{rot } \vec{H}_i \right) - \left(\vec{H}_i, \text{rot } \vec{A}_i^* \right)$, уравнения (1), соотношения $\vec{E}_i = -j\omega\vec{A}_i$ и теоремы Гаусса от (27) можно перейти к равенству

$$\oint_l \left(\left[\nabla\varphi_e, \vec{A}_i^* \right], \vec{n} \right) dl = - \int_{S_i} \left(\vec{H}_i, \vec{B}_i^* \right) dS - j\omega\gamma_i \int_{S_i} |A_i|^2 dS. \quad (28)$$

Краевое условие (6) (однородное) нужно умножить на потенциал φ_e и проинтегрировать по контуру l . Применение формул $\vec{H}_e = -\nabla\varphi_e$, $\text{rot} \left(\varphi_e \vec{A}_i \right) = \varphi_e \text{rot } \vec{A}_i + \left[\nabla\varphi_e, \vec{A}_i \right]$ и теоремы Гаусса даёт

$$\oint_l \left(\left[\nabla\varphi_e, \vec{A}_i^* \right], \vec{n} \right) dl = \mu_0 \int_{S_e} |\nabla\varphi_e|^2 dS. \quad (29)$$

После вычитания (29) из (28) получается соотношение

$$\int_{S_i} \left(\vec{H}_i, \vec{B}_i^* \right) dS + j\omega\gamma_i \int_{S_i} |A_i|^2 dS + \mu_0 \int_{S_e} |\nabla\varphi_e|^2 dS = 0. \quad (30)$$

Из этого соотношения следует, что $\vec{A}_i \equiv 0$ в S_i , $\vec{H}_i = 0$ в S_i и $\varphi_e = C_1 = \text{const}$ в S_e . Существование последнего интеграла обусловлено тем, что полный заряд на контуре l равен нулю. Это доказывается путём интегрирования уравнения (24) по контуру l и применения теоремы Гаусса

са. Поэтому $|\nabla\varphi_e|$ имеет на бесконечности асимптотику r^{-2} , что и обеспечивает существование интеграла от $|\nabla\varphi_e|^2$ в (30). Это же обстоятельство обеспечивает возможность применения теоремы Гаусса при получении (29). Поскольку согласно (15) потенциал φ_e обращается на бесконечности в нуль, $\varphi_e = 0$ в S_e ($C_1 = 0$). Далее следует считать, что представление (13) для φ_e справедливо не только в S_e , но и в S_i . Поскольку потенциал φ_e непрерывен при переходе через l , то он будет равен нулю и в S_i , откуда сразу же следует (из формулы скачка нормальных производных потенциала на l), что $\sigma = 0$. Точно также можно продолжить представление (10) за пределы l в область S_e , считая всё пространство однородным анизотропным магнетиком. Однако чтобы доказать, что \vec{A}_e равен нулю и в S_e , необходимо, чтобы он обращался в нуль на бесконечности с порядком r^{-1} (r – расстояние от l до произвольной точки в S_e). Для этого нужно проинтегрировать (22) по контуру l . Второй интеграл слева исчезнет, как и правая часть, и тогда

$$\oint_l i_q dl_q + \frac{1}{\pi m} \oint_l i_p \left[\oint_l (\vec{n}_q, \vec{\mu}_i \nabla_q K_0(kr_a)) dl_q \right] dl_p = 0. \quad (31)$$

Во втором интеграле порядок интегрирования изменён. Внутренний интеграл можно преобразовать по теореме Гаусса, и тогда

$$\begin{aligned} \oint_l (\vec{n}_q, \vec{\mu}_i \nabla_q K_0(kr_a)) dl_q &= \int_{S_i} (\nabla_q, \vec{\mu}_i \nabla_q K_0(kr_a)) dS_q = \\ &= \int_{S_i} \left(\mu_{ix} \frac{\partial^2 K_0(kr_a)}{\partial x_q^2} + \mu_{iy} \frac{\partial^2 K_0(kr_a)}{\partial y_q^2} \right) dS_q = k^2 \int_{S_i} K_0(kr_a) dS_q. \end{aligned}$$

Учитывая внешнее интегрирование в (31), второй член в (31) можно представить в виде

$$k^2 \oint_l \left[\frac{1}{\pi m} \oint_l i_p K_0(kr_a) dl_p \right] dl_q.$$

Внутренний интеграл с точностью до постоянной совпадает с выражением (10) для A_i , и поэтому второй член в (31) равен нулю, поскольку $A_i = 0$ в S_i , как уже было доказано. Поэтому

$$\oint_l j_q dl_q = 0. \quad (32)$$

Из этого условия и формулы (10) следует, что потенциал A_i , определённый в S_e согласно формуле (10), затухает на бесконечности как r^{-1} . После этого нужно воспользоваться тождеством

$$\oint_l \left([\vec{H}_i, \vec{A}_i], \vec{n} \right) dl = j\omega\gamma_i \int_{S_e} |A_i|^2 dS + \int_{S_e} (\vec{H}_i, \vec{B}_i) dS, \quad (33)$$

где \vec{A}_i определён по формуле (10) в области S_e , $\vec{B}_i = \text{rot } \vec{A}_i$, $\vec{H}_i = (\mu_0 \tilde{\mu}_i)^{-1} \vec{B}_i$. Поскольку согласно (10) вектор \vec{A}_i непрерывен при переходе через l , \vec{A}_i равен нулю на внешней стороне l . Тогда согласно (33) $\vec{A}_i \equiv 0$ в области S_e , и, очевидно, $\vec{H}_i = 0$ в S_e . Интегралы в (33) по бесконечной области S_e существуют в силу условия (32). Поскольку скачок касательных составляющих \vec{H} при переходе через l равен плотности тока \vec{i} , то она равна нулю, что и требовалось доказать. Таким образом, система (22), (24) имеет единственное решение. Опираясь на этот факт и используя теоремы Нётера [5], можно доказать следующее: (22), (24) разрешима при условии, что источники внешнего поля расположены вне l . При этом условии правые части (22), (24) будут бесконечно дифференцируемыми функциями.

Таким образом, показано, что система уравнений (22), (24) имеет единственное решение и может быть использована для расчёта магнитного поля в шихтованных магнитопроводах трансформаторов и электрических машин.

Библиографический список

1. **Острейко В. Н.** Расчет электромагнитных полей в многослойных средах. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981. – 152 с.
2. **Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.** Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высш. шк., 1970. – 710 с.
3. **Михлин С.Г.** Линейные уравнения в частных производных. – М.: Высш. шк., 1977.
4. **Тозони О.В., Маейргойз И.Д.** Расчёт трёхмерных электромагнитных полей. – Киев: Техника, 1974.
5. **Мухелишвили Н.И.** Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 512 с.

УДК 621.311

Разработка мероприятий по повышению надежности главных схем электростанций Республики Йемен

*В.А. Савельев, д-р техн. наук, А.И. Кулешов, канд. техн. наук,
Мохамед А.С., асп.*

Правительство Республики Йемен уделяет постоянное внимание развитию энергетики, однако в силу слабой экономики и отсутствия инвестиций электроэнергетика развивается низкими темпами. Получаемые за оплату электроэнергии средства не обеспечивают проведение ремонтов, а в ряде случаев и выполнение восстановительных работ.

Прогноз электропотребления для нормального, повышенного и пониженного темпов роста показывает, что к 2012 – 2013 гг. спрос на электроэнергию может увеличиться в 2 раза (рис. 1).

Отставание развития энергетики замедляет подъем экономики республики. Поэтому был принят ряд законов и правительственных решений по реформированию электроэнергетики страны.

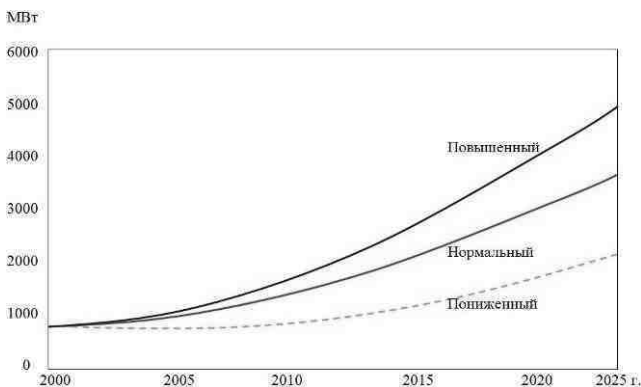


Рис. 1. Графики прогнозируемого роста электропотребления в ЭСЙ

Основные направления реформирования сводятся к следующему:

- вопросы эксплуатации и развития генерирующего комплекса будут сосредоточены в государственных компаниях;
- устанавливаемые тарифы для потребителей электроэнергии и строгий учёт по использованию электроэнергии должны обеспечивать повышение эффективности отрасли.

Для реализации реформ был образован комитет по экономике. В его функции входит:

- планирование роста спроса на электроэнергию;
- передача данных о росте спроса генерирующим энергокомпаниям (ЭК) (это обеспечит их исходными материалами для планирования и последующего развития генерирующего комплекса);
- мониторинг ценовых показателей и подготовка материалов для формирования финансовой политики;
- организация соответствующего подразделения, ответственного за обеспечение качества электроэнергии в энергосистеме и у потребителей (уровни напряжения, отклонение частоты, наличие гармоник и т.д.).

Перспективы развития энергетики Йемена связаны с сооружением крупной электростанции Сафер с установленной мощностью 800 МВт и линий напряжением 400 кВ, связывающих эту электростанцию с г. Сана на севере страны и ТЭС Хисва на юге. Сооружение этой электростанции тесно связано с дальнейшим развитием горнорудной промышленности. Ввод в работу этой электропередачи усилит всю энергосистему Йемена. На рис. 2. представлена структурная схема основной системообразующей сети энергосистемы Йемена с вариантом подключения электростанции Сафер.

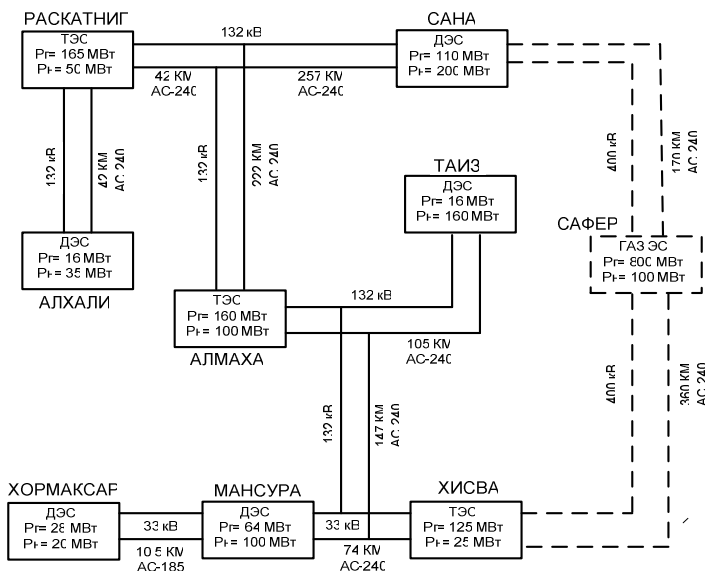


Рис.2. Схема основных сетей энергосистемы Йемена

Основными задачами на перспективу являются: завершение строительства новой электростанции мощностью 800 МВт в городе Сафер и протяженной двухцепной межсистемной ВЛ 400 кВ, имеющей общую пропускную способность 1500 МВт.

Сооружение двухцепной ВЛ 400 кВ (Сафер – Сана), (Сафер – Хисва) (170 – 360 км) носит для всей энергосистемы системообразующий характер. Для обеспечения работоспособности линия электропередачи оснащена последовательными и поперечными регулируемыми устройствами, что обеспечит поддержание в расчетных установившихся режимах уровней напряжения 400 кВ ($\pm 5\%$). На ПС Сана и Хисва планируется установить автотрансформаторы (400/132 кВ) и трансформаторы (132/33 кВ). Для резервирования собственных нужд на ПС устанавливаются дизель-генераторы.

Несмотря на очевидную перспективу роста мощности генерирующих источников и строящуюся двухцепную ВЛ 400 кВ, в настоящее время существует ряд проблем, требующих разрешения в ближайшие годы.

Наиболее проблематичным в ЭЭС Йемена является электроснабжение столицы, города Сана.

Несмотря на то, что в этом энергорайоне расположена электростанция установленной мощностью 100 МВт, район в целом имеет значительный дефицит активной мощности. Местная нагрузка составляет 200 МВт. В пяти километрах от города находится электростанция Дахпан с установленной мощностью 46 МВт. От неё по одноцепной линии 33 кВ к городу передаётся мощность 30 МВт. В режиме максимальных нагрузок линия практически полностью загружена. От крупной подстанции Дамар, находящейся в 105 км от города и имеющей два трансформатора, по двухцепной линии передаётся в город мощность 70 МВт. При отключении одного из трансформаторов второй трансформатор будет перегружаться в 1,5 – 2 раза, что может привести к его отключению. В этом случае дефицит активной мощности в энергорайоне г. Сана составит 70 МВт, т.к. необходимая мощность не может быть передана по линиям Сана – Амран – Раода – Дахпан из-за указанной выше загруженности линии Сана – Дахпан по допустимому току. В свою очередь при отключении линии Сана – Дахпан в энергорайоне г. Сана также возникнет дефицит активной мощности из-за невозможности передать её через полностью загруженные трансформаторы. Ещё одной проблемой данного энергорайона является снижение напряжений в режиме максимальных нагрузок. Несмотря на то, что в 1999 году на подстанции была установлена батарея статических конденсаторов мощностью 50 Мвар, это не решило проблему поддержания оптимальных уровней напряжения. Установка ещё одной батареи может устранить эту проблему, но не решит вопрос повышения надёжности электроснабжения г. Сана в целом.

При рассмотрении вариантов развития электрических сетей авторами предлагается сооружение одноцепной линии между подстанцией Рахида и городом Сана длиной 150 км, что и подтверждается расчетами. Это позволит, во-первых, снизить потери реактивной мощности из-за снижения общей длины линий, по которым мощность поступает в город Сана из южной части Йемена; во-вторых, разгрузить из-за перераспределения потоков активной и реактивной мощностей трансформаторы, питающие г. Сана (отключение одного из них не будет приводить к перегрузке и отключению другого); в-третьих, передавать необходимую мощность в случае аварийного отключения линии Сана – Дахпан в г. Сана по линиям Сана – Амран, Раода – Дахпан.

Таким образом, создание линии Рахида – Сана решает сразу две главные проблемы электроснабжения рассматриваемого региона: поддержание оптимальных уровней напряжения и повышение надёжности питания города Сана.

Как показал анализ, другим «слабым» местом энергосистемы является двухцепная линия Хисва – Дукем; поскольку она перегружена по допустимому току ($I/I_{дон} = 1,05$), то в случае отключения одной из цепей вторая цепь может отключиться автоматикой. Такая авария приведёт к значительному дефициту мощности (84 МВт) в северной части Йемена, т.к. данные линии являются единственными, связывающими южную и северную части энергосистемы.

Разгрузку этих линий можно осуществить двумя способами: заменить существующие провода марки М-300 на провода марки М-400 с большим значением допустимого тока или построить третью линию (Хисва – Дукем).

С использованием методики расчёта надёжности была определена частота аварийных отключений и суммарная (за год) длительность вынужденного простоя любого присоединения электростанции (генератора, трансформатора, линии), частота и продолжительность аварийных ситуаций различного вида. Расчет этих показателей потребовал анализа отказов элементов в схеме при разных ее состояниях.

При оценке надёжности электрической схемы электростанций был рассчитан системный ущерб: ущерб от нарушения электроснабжения потребителей и ущерб от снижения частоты в системе. Для каждого варианта схемы были рассмотрены те отказы, которые приводят к потере генерирующей мощности или питания потребителей, и рассчитана частота аварийных отключений генераторов и линий, а также средняя длительность их простоя.

Для расчёта надёжности схем электрических соединений РУ используется таблично-логический метод [1]. Расчет надёжности был выполнен для наиболее важных электростанций (Хисва, Мансура, Рас-Катнип).

Значения ущербов от ненадежности схем выдачи мощности, РУ и суммарные ущербы для этих основных станций приведены в табл. 1.

Из таблицы видно что 90 – 98 % суммарного ущерба электрических схем всех станций приходится на схемы РУ. Поэтому для повышения надежности станций необходимо в первую очередь повысить надежность этих схем.

Таблица 1. Значения ущербов от ненадежности схем выдачи мощности

Наименование станции и страна поставщик оборудования	Ущерб от ненадежности схем выдачи мощности, тыс. р.	Ущерб от ненадежности схемы РУ, тыс. р.	Суммарный ущерб, тыс. р.
Мансура (Япония)	261	8190	8460
Рас-Катнип (Италия)	795	11490	12285
Хисва (Россия)	735	16200	16935

Наибольший среднегодовой ущерб от ненадежности РУ – на станции Хисва. Это объясняется низкой надежностью схемы РУ при большом количестве присоединений.

Для повышения надежности работы станции нужно заменить выключатели на высшем напряжении на выключатели, например, производства фирмы АВВ. Другой возможностью повышения надежности работы рассматриваемых станций может стать изменение схем РУ.

Выводы

1. Наиболее проблемным является энергорайон города Сана, в котором могут возникать значительные дефициты мощности и отклонения напряжения. Главные схемы электростанций Хисва, Мансура, Рас-Катнип требуют реконструкции.

2. Необходима разработка и внедрение в энергосистему автоматической частотной разгрузки для исключения дальнейшего развития аварийных ситуаций при возникновении значительных дефицитов мощности.

Библиографический список

1. Гук Ю.Б. Анализ надежности электроэнергетических установок. – Л.: Энергоатомиздат, 1988. – 222 с.

УДК 621.311.06

Исследование послеаварийных режимов электроэнергетической системы Йемена

А.И. Кулешов, канд. техн. наук, Мохамед А.С., асп.

Исследование послеаварийных режимов выполнялось в целях определения необходимых объёмов АЧР1 и АЧР2 и их размещения в различных частях энергосистемы Йемена (ЭСЙ).

В ЭСЙ можно выделить пять связанных между собой энергетических районов (рис. 1). К первому району относятся станция Рас-Катнип и подстанция Ходаэда. Связь между районами 1 и 2 осуществляется по линиям Пажэл – Рас-Катнип протяженностью 152 км. Ко второму району относятся станции Таиз и Ал-Маха, а также подстанции Таиз, ИВВ, Дамар и Пажэл. Связь между районами 2 и 3 осуществляется по линиям Дамар – Сана протяженностью 105 км, а между районами 2 и 4 – по линиям Рахида – Таиз протяженностью 41 км.

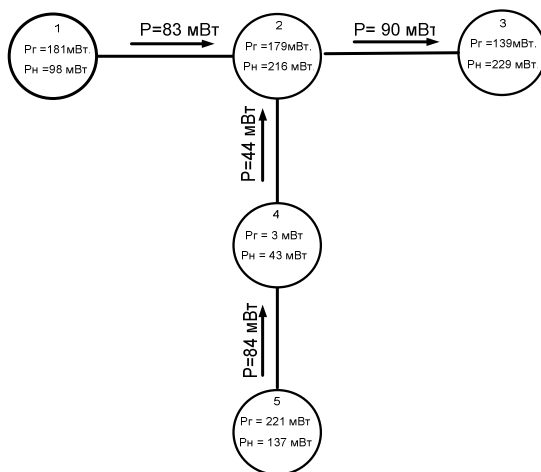


Рис. 1. Связи и потоки мощности между районами в ЭСЙ

К району 3 относятся станция Дахпан, подстанции Рауда, Амран и город Сана с установленной в нём дизельной электростанцией.

К району 4 относятся станции Хор-Максар, Ал-Мансура и Хисва, а также подстанции Шиназ Плок 80, Докэм, Хапилин и Рахида.

Связь между районами 4 и 5 осуществляется по линиям Хисва – Докэм протяженностью 106 км.

При разрыве любой из указанных связей ЭСЙ распадается на две работающие независимо друг от друга части. Причём в одной из них образуется избыток активной мощности, и частота будет выше номинальной, а в другой дефицит и частота будет снижаться.

Расчет возможного снижения частоты в дефицитной части системы рассмотрим на примере разрыва связи между первым и вторым районами (рис. 2).

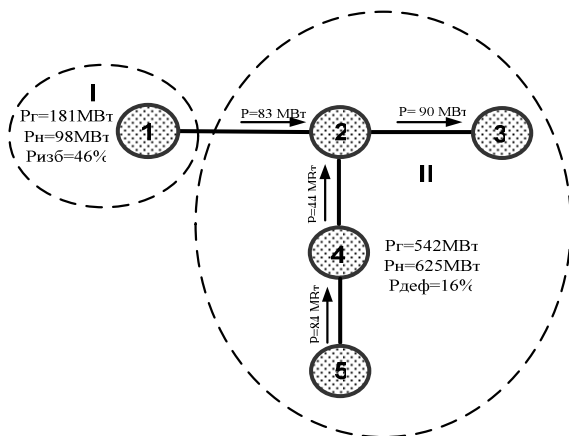


Рис. 2. Образование дефицита мощности при разрыве связи 1 – 2

На практике такое разделение системы может произойти по трём причинам: при полном погашении станции Рас-Катнип, при отключении подстанции Пажэл или при отключении линий Рас-Катнип – Пажэл. Как показано на рисунке, в результате одной из этих аварий ЭСЙ разделится на две автономно работающие системы – I и II.

В системе I генерируемая активная мощность составит 181 МВт, при мощности нагрузки 98 МВт и образуется избыток мощности 83 МВт, что составляет 46 % от генерации.

В системе II генерируемая активная мощность составляет 542 МВт, а мощность нагрузки – 625 МВт. При разделении в этой части образуется

дефицит мощности 83 МВт, что составляет 16 % от генерации. Частота, которая установится в районе II при данном дефиците мощности, определяется по выражению [1]

$$\Delta f = \frac{50P_{\text{деф}}}{K_{pf}P_{\text{макс}}} = \frac{50 \cdot 83}{2 \cdot 542} = 4 \text{ Гц},$$

где K_{pf} – коэффициент регулирующего эффекта нагрузки [1. С. 98];
 $P_{\text{макс}}$ – максимальная мощность, генерируемая в системе.

Тогда частота установится на уровне

$$f = f_{\text{ном}} - \Delta f = 50 - 4 = 46 \text{ Гц}.$$

При разрыве связей между районами 2 и 3 в районе 3 образуется дефицит мощности 90 МВт, что составляет 65 % от генерации.

На практике такое деление системы может произойти по двум причинам: при полном отключении подстанции Дамар или при отключении линий Дамар – Сана. В этом случае, как показывают аналогичные расчеты, в отделившемся районе частота снижается до 34 Гц.

При разрыве связей между вторым и третьим районами в отделившейся части II возникает дефицит в 44 МВт и частота в этой части снижается до 47,8 Гц.

На практике такой распад системы может произойти по двум причинам: при полном отключении подстанции Рахида или при отключении линий Рахида – Таиз.

При отделении пятого района во II части отделившейся системы возникает дефицит в 84 МВт, который приводит к снижению частоты в этой части до 45,9 Гц. Такая авария на практике возможна по двум причинам: при полном отключении подстанции Докэм или при отключении линий Хисва – Докэм.

Данные результаты получены без учета изменения потребления реактивной мощности нагрузкой, которое в соответствии со статическими характеристиками нагрузки по частоте будет увеличиваться при снижении частоты. Увеличение потребления реактивной мощности, в свою очередь, приводит к снижению напряжения и увеличению потерь как активной, так и реактивной мощности. Таким образом, реальное снижение частоты в отделившихся частях с дефицитом мощности будет еще выше. Для более точного расчета значения частоты с учетом потерь мощности и

статических характеристик реактивной нагрузки по частоте были выполнены расчеты установившихся режимов по программному комплексу Energy_F. Результаты расчетов подтвердили высказанные предположения: так при отделении района 3 (рис. 1, 2) частота в отделившейся части составила 38,4 Гц вместо 47,8 Гц.

Оценивая полученные результаты расчетов, можно видеть, что все рассмотренные режимы приводят к существенному снижению частоты в дефицитной части. Ввиду отсутствия необходимых резервов мощности на электростанциях для поддержания нормальной частоты требуется отключать часть потребителей. Для этой цели используется автоматическая частотная разгрузка (АЧР).

Библиографический список

1. Рабинович Р.С. Автоматическая частотная разгрузка энергосистем. – М.: Энергоатомиздат, 1989.