© «Вестник ИГЭУ» Вып. 4 2005 г.

УДК 681.518

МОДЕЛИ ПРОЕКЦИОННЫХ ОТНОШЕНИЙ В ДИАЛОГОВЫХ ОБУЧАЮЩИХ ПРОГРАММАХ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

БОЙКОВ А.А. –инженер, МИЛОСЕРДОВ Е.П., канд. техн. .наук, ФЕДОТОВ А.М. , канд. техн. наук,

Определена модель проекционных отношений для комплексного двухкартинного чертежа (эпюра Монжа) с возможностью построения некоторого числа дополнительных проекций , рассмотрены операции с объектами этой модели и алгоритмы их реализации методами и средствами компьютерной графики.

Алгоритмические модели, в рамках которых будут разрабатываться диалоговые обучающие программы, должны адекватно описывать предметную область для создания и преобразования графических объектов, а также иметь возможность построения алгоритмов, позволяющих идентифицировать и оценить не только конечные результаты, но и сам процесс решения задач. Учитывая специфику и разнообразие графических задач, совокупность алгоритмических моделей следует рассматривать как иерархию, в которой на верхнем уровне определяются модели для отображения наиболее общих свойств и закономерностей предметной области, а на нижних уровнях модели, описывающие различные классы задач. Модели верхнего уровня в этом случае будут определять характер диалоговой среды: принципы описания задач, интерфейсы пользователя и протоколы обмена данными. Система требований к моделям верхнего уровня и общий подход к их разработке сформулированы в [1].

Ключевым звеном, определяющим вид моделей верхнего уровня и набор алгоритмических моделей для различных классов задач начертательной геометрии, является модель проекционных отношений, определяющая закономерности связей между геометрическими объектами, расположенными в пространстве, и их отображениями на плоскости. Существующие классы моделей проекционных отношений – модели центрального (перспективного) проецирования, аксонометрические проекции, модели проекций с числовыми отметками, модели ортогонального проецирования одновременно на несколько плоскостей проекций (комплексный чертеж) были разработаны гораздо раньше появления алгоритмов и средств компьютерной графики и не могут без дополнительной адаптации быть эффективно использованы для решения её задач. Принципы адаптации проекционных моделей для задач компьютерной графики определились требованиями стандартов (алгоритмическими и аппаратными) к системам компьютерной графики, которые были разработаны и согласованы в 70-е годы прошлого века [2, 3]. В соответствии с этими принципами рассмотрим модель проекционных отношений для комплексного двухкартинного чертежа (эпюра Монжа) с возможностью построения некоторого числа дополнительных проекций. Для каждого геометрического объекта, находящегося в трехмерном пространстве, модель позволяет получить плоское отображение в виде определенным образом связанных между собой ортогональных проекций объекта на заданную систему плоскостей проекций.

В качестве объектов этой модели традиционно рассматриваются точки, прямые, плоскости, а также объекты, однозначно определяющие механизм проецирования: плоскости проекций, оси проекций, точки отсчета.

Точка в модели представляется своими проекциями и координатами. Число проекций точки равно числу выбранных в модели плоскостей проекций, включая дополнительные. Для проекций точек используются традиционные обозначения в виде прописных латинских букв или цифр с указанием индексов, соответствующих плоскостям проекций.

Для различных видов систем координат, связанных с геометрическими объектами, расположенными в пространстве (мировые координаты), необходимо получить соотношения для преобразования значений координат в систему координат модели. В качестве мировых координат могут быть выбраны любые системы координат, однозначно определяющие положение точки в пространстве, например: 3-х компонентные декартовы, цилиндрические, сферические, специальные криволинейные и др.

Общие случаи проективных преобразований требуют дополнения так называемого «евклидова» пространства, множество точек которого удалены от точки отсчета на конечные, хотя и потенциально сколько угодно большие расстояния («потенциально бесконечные точки»), элементами с особыми свойствами: точками, удаленными от множества точек, а также от точки отсчета на бесконечное расстояние («актуально бесконечные точки»). В соответствии с [4] такое расширенное множество определено как «проективное пространство», в этом пространстве каждая прямая имеет одну особую точку, плоскость имеет одну особую прямую, а трехмерное («евклидово») пространство имеет одну особую плоскость: такие объекты множества определены как «несобственные» элементы проективного пространства. Известно, что исчерпывающее однозначное описание всех элементов проективного пространства возможно в рамках так называемой «однородной системы координат», которая каждой точке пространства ставит в соответствие вектор $\left[x, y, z, t\right]$, компоненты которого не могут одновременно иметь нулевые значения, причем точки «евклидова» пространства представлены векторами, имеющими компоненту *t*, не равную 0, а «несобственные» точки – с компонентами *t*, равными 0 .

Учитывая необходимость проективных преобразований, в качестве систем координат, связанных с объектами и координатами модели, выбираются соответственно четырехкомпонентные и трехкомпонентные однородные системы координат. В общем случае для преобразования координат точек в рамках выбранной модели необходимо определить квадратную матрицу преобразования 4-го порядка, умножая вектор координат точки объекта на матрицу преобразования, получаем вектор преобразованных координат точки, некоторые компоненты которого могут при преобразовании получить нулевые значения [2]. Все операции проецирования являются операциями вырожденного преобразования, т.е. операциями умножения на матрицу, детерминант которой равен 0. Они ставят в соответствие множеству точек объекта, расположенного в пространстве, множество точек образа (модели) объекта, расположенных на заданной плоскости проекций.

Определим модель ортогонального проецирования на произвольные плоскости проекций следующим образом.

Пусть в заданной системе декартовых координат пространства определены плоскости:

$A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$ (плоскость Π_i)

$A_j x + B_j y + C_j z + D_j = 0$ (плоскость Π_j) (1)

Предполагается, что плоскости не параллельны, т.е. не имеют общей несобственной прямой. В соответствии с известными соотношениями [4] в этом случае равенство $A_i : A_j = B_i : B_j = C_i : C_i$ не имеет места по крайней мере в одной из своих частей и плоскости пересекаются по прямой, все точки которой удовлетворяют системе линейных уравнений, определяющих плоскости. Точка, принадлежащая этой прямой (по традиции такая прямая называется осью проекций и обозначается как x_{ij}), может быть найдена из условия пересечения прямой с какой-либо координатной плоскостью, например с плоскостью $X = 0$, откуда:

$$B_i y + C_i z + = -D_i$$
$$B_j y + C_j z + = -D_j \qquad (2)$$

Обозначая точку пересечения оси проекций с координатной плоскостью как точку Q и учитывая , что $X_Q = 0$, по правилу Крамера определяются ее координаты:

$$Y_Q = \frac{-D_i C_j + D_j C_i}{B_i C_j - B_j C_i}$$
$$Z_Q = \frac{-D_j B_i + D_i B_j}{B_i C_j - B_j C_i} \qquad (3)$$

Если ось проекций параллельна или совпадает с выбранной координатной плоскостью, то следует найти по аналогичным соотношениям координаты точки пересечения оси с другой координатной плоскостью (прямая не может быть параллельна одновременно трем координатным плоскостям).

В соответствии с [4], угловые коэффициенты линии пересечения плоскостей, заданной уравнениями плоскостей вида (1), находятся как определители матриц:

$$a_{ij} = \begin{vmatrix} B_i & C_i \\ B_j & C_j \end{vmatrix}; \quad b_{ij} = \begin{vmatrix} C_i & A_i \\ C_j & A_j \end{vmatrix}; \quad c_{ij} = \begin{vmatrix} A_i & B_i \\ A_j & B_j \end{vmatrix}, \quad (4)$$

и прямая, в общем случае, может быть описана каноническим уравнением

$$\frac{x - X_Q}{a_{ij}} = \frac{y - Y_Q}{b_{ij}} = \frac{z - Z_Q}{c_{ij}}$$

Однако для охвата всех частных случаев, когда один или два из угловых коэффициентов прямой равны 0, в модели целесообразно представить уравнение прямой, являющейся линией пересечения заданных плоскостей проекций, в параметрической форме:

$$x = X_Q + a_{ij} t \quad y = Y_Q + b_{ij} t \quad z = Z_Q + c_{ij} t \quad (5)$$

Если в пространстве задана точка T с декартовыми координатами X_T, Y_T, Z_T , то координаты точек, являющихся ортогональными проекциями на плоскости Π_i и Π_j , могут быть определены как решение системы уравнений:

$$x = X_T + A_i t$$
$$y = Y_T + B_i t \qquad (6)$$
$$z = Z_T + C_i t$$
$$A_i (X_T + A_i t) + B_i (Y_T + B_i t) + C_i (Z_T + C_i t) + D_i = 0$$

Отсюда координаты точки T_i , являющейся ортогональной проекцией точки T на плоскость Π_i , определяются следующим образом:

$$X_{Ti} = X_T + A_i \left(\frac{A_i X_T + B_i Y_i + C_i Z_i + D_i}{A_i^2 + B_i^2 + C_i^2}\right)$$
$$Y_{Ti} = Y_T + B_i \left(\frac{A_i X_T + B_i Y_i + C_i Z_i + D_i}{A_i^2 + B_i^2 + C_i^2}\right) \qquad (7)$$
$$Z_{Ti} = Z_T + C_i \left(\frac{A_i X_T + B_i Y_i + C_i Z_i + D_i}{A_i^2 + B_i^2 + C_i^2}\right)$$

По этим же соотношениям определяются координаты точки T_j .

Уравнение плоскости, перпендикулярной линии пересечения плоскостей проекций и проходящей через точку T (обозначим её как τ), может быть определено по угловым коэффициентам вектора нормали, которым в данном случае является ось проекций:

$$a_{ij}(x - X_T) + b_{ij}(y - Y_T) + c_{ij}(z - Z_T) = 0 \quad (8)$$

Поскольку плоскость τ перпендикулярна прямой, принадлежащей обеим плоскостям проекций Π_i и Π_j , то в соответствии с признаком взаимной перпендикулярности плоскостей она будет перпендикулярна каждой плоскости и следовательно, ей будут принадлежать проецирующие прямые к этим плоскостям, проведенные через точку T , и соответственно также и проекции точек T_i и T_j

Координаты точки пересечения плоскости τ и оси проекций x_{ij} (обозначим точку как T_{ij}) могут быть найдены так же, как координаты проекции точки Q на плоскость τ :

$$X_{Tij} = X_Q + a_{ij} \left(\frac{a_{ij} X_Q + b_{ij} Y_Q + c_{ij} Z_Q + d_{ij}}{a_{ij}^2 + b_{ij}^2 + c_{ij}^2}\right)$$

$$Y_{Tij} = Y_Q + b_{ij}\left(\frac{a_{ij}X_Q + b_{ij}Y_Q + c_{ij}Z_Q + d_{ij}}{a_{ij}^2 + b_{ij}^2 + c_{ij}^2}\right) \quad (9)$$

$$Z_{Tij} = Z_Q + c_{ij}\left(\frac{a_{ij}X_Q + b_{ij}Y_Q + c_{ij}Z_Q + d_{ij}}{a_{ij}^2 + b_{ij}^2 + c_{ij}^2}\right),$$

где значения a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} и d_{ij} определяются соотношением (2).

Для построения обобщенной модели двухкартинного комплексного чертежа точка Q принимается за начало координат и с ней связывается в общем случае косоугольный репер $\bar{u}_0$, $\bar{v}_0$, $\bar{w}_0$, компоненты которого задают метрику и направления осей координат модели, при этом $\bar{u}_0$ направлен вдоль оси x_{ij}, а $\bar{v}_0$ и $\bar{w}_0$ расположены соответственно в плоскостях Π_i и Π_j перпендикулярно оси x_{ij}.

По значениям координат точек Q, T_i и T_j а также T_{ij} в исходной декартовой системе координат определяются значения координат точек проекций в обобщенной модели комплексного чертежа :

$$U_T = |T_{ij} - Q| \circ \bar{u}_0$$

$$V_T = |T_{ij} - T_i| \circ \bar{v}_0 \qquad (10)$$

$$W_T = |T_{ij} - T_j| \circ \bar{w}_0$$

где инвариантные значения модулей расстояний между точками определяются в исходной декартовой системе координат, а знаки координат модели определяются соответствием векторов расстояний выбранным направлениям единичных векторов базиса. Как правило, используется правосторонняя система координат, т.е. при построении обобщенного комплексного чертежа на совмещенной плоскости изображения ось u от начала координат направлена влево, ось v - вниз а ось w - вверх. На комплексном чертеже каждая точка представлена двумя проекциями, соединенными с осью проекций линией связи. Поскольку ось проекций перпендикулярна плоскости τ, в которой расположены отрезки, соединяющие проекции точек с осью проекций (линией связи), то эти отрезки также перпендикулярны оси проекций. Полученная модель дает взаимно-однозначное соответствие между точками комплексного чертежа и точками пространства для любого значения угла между плоскостями, отличного от $n \circ \pi$, где n - целое число. Широко известный случай ортогонального расположения плоскостей проекций (чертеж Монжа) имеет место, когда для уравнений плоскостей проекций вида (1) выполняется соотношение

$$A_iA_j + B_iB_j + C_iC_j = 0 \qquad (11)$$

В этом случае в плоскости τ перпендикуляры к плоскостям проекций и линии связи между проекциями точек образуют правильный четырехугольник (квадрат), из чего следует равенство значений координат модели и расстояний до соответствующих плоскостей проекций.

Таким образом, для реализации модели двухкартинного комплексного чертежа с несколькими дополнительными проекциями, отображаемыми на одной плоскости изображения необходимо выполнить следующее:

1. Определить в пространстве однородную либо трехмерную декартову систему координат. Координатные плоскости этой системы следует рассматривать как плоскости проекций, за которыми зарезервированы названия Π_1, Π_2, Π_3. Описать в этой координатной системе отдельные точки и элементы геометрических объектов.

2. Задать дополнительные плоскости проекций $\Pi_i, \Pi_j, \Pi_k ...$ в трехмерной декартовой системе координат. Каждая плоскость задается набором коэффициентов A, B, C, D, однозначно определяющих уравнение вида (1).

3. Определить угловые коэффициенты и выбрать точки отсчета дополнительных осей проекций. В качестве точек отсчета рекомендуется выбрать точки пересечения дополнительных осей проекций с плоскостями координат.

4. Сформировать матрицу преобразования координат точек геометрических объектов в координаты проекций точек. В общем случае эта квадратная матрица 4-го порядка и компоненты этой матрицы определяются по соотношениям (7).

5. Построить на общей плоскости изображения отображения проекций точек геометрических объектов и дополнительных осей проекций, использовав соотношения (9) и (10).

Список литературы

1. **Бойков А.А., Милосердов Е.П., Федотов А.М.** Разработка диалоговых обучающих программ по задачам начертательной геометрии для комплекса дистанционного обучения // Вестник ИГЭУ. – 2004. – Вып. 3.

2. **Роджерс Д., Адамс Д.** Математические основы машинной графики. – М.: Машиностроение, 1980.

3. **Роджерс Д.** Алгоритмические основы машинной графики. – М.: Мир, 1989.

4. **Александров П.С.** Лекции по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1968.