

Математическое моделирование процессов вентиляции и отопления в больших производственных, культурных и спортивных помещениях

Ясинский Ф.Н., д-р физ.-мат. наук, Кокорин А.С., асп.

Исследуется применение численных методов для моделирования движения воздуха и тепла в больших помещениях. Предложена модель, описывающая движение воздуха в помещениях, учитывающая влияние тепла на движение потоков воздуха. Рассмотрена разностная схема и алгоритм решения уравнений модели.

Ключевые слова: численные методы, уравнение Навье-Стокса, моделирование, разностная схема, метод расщепления, метод прогонки.

Mathematical Modeling of the Processes to Ventilations and Heating in Greater Production, Cultural and Athletic Premiseses

F.N. Yasinskiy, Doctor of Physics and Mathematics, A.S. Kokorin, Post-Graduate Student

In this article the application of numerical methods for simulation of air movement and heat in large buildings is investigated. In this Work a model of air flow is described. The model takes into account the influence of heat on air flow. The difference scheme and the algorithm for solving equations are also considered in this paper.

Keywords: calculus of approximations, Navier-Stokes equation, simulation, finite-difference scheme, sweep method.

Введение. При проектировании больших производственных и культурных помещений возникает задача расчета процессов воздухообмена и теплообмена в этих помещениях при работе установленного оборудования. Часто эта задача решается с помощью натуральных экспериментов. Такой подход ведет к большим погрешностям, материальным затратам и требует много времени. Ниже описывается математическая модель движения воздуха и алгоритм для ее численного решения, которые позволяли бы на этапе проектирования создавать наилучшую систему воздухообмена и отопления.

Используемые уравнения. Для моделирования движения воздуха используем уравнение Навье-Стокса:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (V \Delta) \vec{V} = \\ = -\frac{1}{\rho} \nabla P + (v_m + v_t) \Delta \vec{V} - \vec{g} \beta T, \end{aligned} \quad (1)$$

где \vec{V} – вектор скоростей; P – давление; t – время; v_m – молярная вязкость; v_t – турбулентная вязкость; ρ – плотность воздуха; \vec{g} – ускорение свободного падения; β – коэффициент объемного расширения воздуха.

Так как скорость движения воздуха в помещении небольшая, то можно считать, что воздух не сжимается. Добавим уравнение неразрывности, означающее, что при любом движении объем воздуха остается постоянным:

$$\operatorname{div} V = 0. \quad (2)$$

В производственных помещениях часто находятся источники тепла (двигатели, генераторы, печки, станки и т.д.), которые сильно влияют на

движение воздуха. Поэтому в расчетах нужно учитывать влияние тепла. Введем дополнительное уравнение, описывающее распространение тепла:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (V \nabla) T = c \cdot (v_m + v_t) \Delta T, \quad (3)$$

где T – температура; λ – теплопроводность; c – коэффициент температуропроводности.

Система уравнений (1)–(3) называется уравнениями тепловой конвекции в приближении Буссинеска [3].

Чтобы точнее моделировать движение воздуха, нужно учитывать, что стены помещения проводят тепло. Для этого введем уравнение, описывающее распространение тепла в стенках помещения:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \Delta T, \quad (4)$$

где T – температура; a – коэффициент температуропроводности.

Рассмотрим эти уравнения для трехмерного пространства:

1) уравнение Навье-Стокса

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} = \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + (v_m + v_t) \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial \bar{V}_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} = \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + (v_m + v_t) \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) - \bar{g} \cdot \beta \cdot T, \\ \frac{\partial \bar{V}_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + (v_m + v_t) \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right); \end{cases} \quad (5)$$

2) уравнение неразрывности

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0; \quad (6)$$

3) уравнение теплопроводности

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} + V_z \frac{\partial T}{\partial z} = \\ = c(v_m + v_t) \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right); \end{aligned} \quad (7)$$

4) уравнение теплопроводности для стен помещения

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (8)$$

Метод решения уравнений. Уравнения (5) и (7) решаются методом расщепления и прогонки. Суть этого метода в том, что шаг по времени делится на 4 этапа продолжительностью $\frac{\tau}{4}$. На первом этапе расчет ведется лишь в направлении Oх, на втором – лишь в направлении Oу, на третьем – лишь в направлении Oz. На четвертом шаге, учитываются слагаемые, не учтенные на предыдущих шагах. Рассмотрим более подробно разностную схему первого уравнения системы (5) (для остальных уравнений разностная схема строится аналогично):

• первый этап

$$\begin{aligned} V_{xi,j,k}^{n+\frac{1}{4}} &= V_{xi,j,k}^n + \\ &+ \frac{\tau}{4} \left[-\frac{\left(V_{xi+1,j,k}^n + |V_{xi,j,k}^n| \right) \left(V_{xi,j,k}^{n+\frac{1}{4}} - V_{xi-1,j,k}^{n+\frac{1}{4}} \right)}{2h} \right. \\ &\left. - \frac{\left(V_{xi+1,j,k}^n - |V_{xi,j,k}^n| \right) \left(V_{xi+1,j,k}^{n+\frac{1}{4}} - V_{xi,j,k}^{n+\frac{1}{4}} \right)}{2h} + \right. \\ &\left. + (v_m + v_t) \left(\frac{V_{xi+1,j,k}^{n+\frac{1}{4}} - 2V_{xi,j,k}^{n+\frac{1}{4}} + V_{xi-1,j,k}^{n+\frac{1}{4}}}{h^2} \right) \right]; \end{aligned} \quad (9)$$

• второй этап

$$\begin{aligned} V_{xi,j,k}^{n+\frac{2}{4}} &= V_{xi,j,k}^{n+\frac{1}{4}} + \\ &+ \frac{\tau}{4} \left[-\frac{\left(V_{xi+1,j,k}^{n+\frac{1}{4}} + |V_{xi,j,k}^{n+\frac{1}{4}}| \right) \left(V_{xi,j,k}^{n+\frac{2}{4}} - V_{xi,j-1,k}^{n+\frac{2}{4}} \right)}{2h} \right. \\ &\left. - \frac{\left(V_{xi+1,j,k}^{n+\frac{1}{4}} - |V_{xi,j,k}^{n+\frac{1}{4}}| \right) \left(V_{xi,j+1,k}^{n+\frac{2}{4}} - V_{xi,j,k}^{n+\frac{2}{4}} \right)}{2h} + \right. \\ &\left. + (v_m + v_t) \left(\frac{V_{xi,j+1,k}^{n+\frac{2}{4}} - 2V_{xi,j,k}^{n+\frac{2}{4}} + V_{xi,j-1,k}^{n+\frac{2}{4}}}{h^2} \right) \right]; \end{aligned} \quad (10)$$

• третий этап

$$\begin{aligned} V_{xi,j,k}^{n+\frac{3}{4}} &= V_{xi,j,k}^{n+\frac{2}{4}} + \\ &+ \frac{\tau}{4} \left[-\frac{\left(V_{xi+1,j,k}^{n+\frac{2}{4}} + |V_{xi,j,k}^{n+\frac{2}{4}}| \right) \left(V_{xi,j,k}^{n+\frac{3}{4}} - V_{xi,j,k-1}^{n+\frac{3}{4}} \right)}{2h} \right. \\ &\left. - \frac{\left(V_{xi+1,j,k}^{n+\frac{2}{4}} - |V_{xi,j,k}^{n+\frac{2}{4}}| \right) \left(V_{xi,j,k+1}^{n+\frac{3}{4}} - V_{xi,j,k}^{n+\frac{3}{4}} \right)}{2h} + \right. \\ &\left. + (v_m + v_t) \left(\frac{V_{xi,j,k+1}^{n+\frac{3}{4}} - 2V_{xi,j,k}^{n+\frac{3}{4}} + V_{xi,j,k-1}^{n+\frac{3}{4}}}{h^2} \right) \right]; \end{aligned} \quad (11)$$

- четвертый этап

$$V_{xi,j,k}^{n+1} = V_{xi,j,k}^{n+\frac{3}{4}} - \frac{\tau}{4\rho} \frac{P_{i+1,j+1,k+1}^{n+1} + P_{i+1,j+1,k-1}^{n+1} + P_{i-1,j-1,k+1}^{n+1} + P_{i-1,j-1,k-1}^{n+1}}{8h} \times \frac{-P_{i-1,j+1,k+1}^{n+1} - P_{i-1,j+1,k-1}^{n+1} - P_{i-1,j-1,k+1}^{n+1} - P_{i-1,j-1,k-1}^{n+1}}{8h} \quad (12)$$

Для решения уравнений (9)–(12) используется метод прогонки: проходя по узлам расчетной сетки в одном направлении, находят прогоночные коэффициенты, затем, проходя в обратном направлении, находят текущее значение скорости.

Граничные и начальные условия. Чтобы начать вычисления, нужно задать граничные и начальные условия.

На твердой стенке скорость воздуха должна быть равна нулю, здесь используется граничное условие первого рода.

Граница может содержать входные и выходные отверстия, для них также задаются граничные условия первого рода, при этом проекция скорости, параллельная границе, задается равной нулю, а перпендикулярная – не равной нулю.

Описание алгоритма. В ходе вычислений итерационно выполняются следующие шаги:

1. Методом слабой сжимаемости вычисляется давление в каждой ячейке. Для этого решается уравнение

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -c^2 \operatorname{div} \vec{V}, \quad (13)$$

где c – константа.

Шаг по времени, используемый при нахождении давления, меньше и кратен шагу по времени, используемому при решении уравнений (5) и (7).

2. Решая уравнение (8), находится распределение температур в стенках помещения.

3. Чтобы найти температуру, методом расщепления и прогонки решается уравнение (7).

4. Молярная вязкость в уравнении (1) является константой, а турбулентная рассчитывается по модели Секундова [2]. Эта модель достаточно точная и стабильная в расчетах:

$$\frac{\partial v_{turb}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 V_i \frac{\partial v_{turb}}{\partial X_i} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial X_j} \left((v_{mol} + \aleph v_{turb}) \frac{\partial}{\partial X_j} v_{turb} \right) + v_{turb} f(v_{turb}/8v_{mol}) D - \gamma L_{min}^{-2} (v_{mol} + \beta v_{turb}) v_{turb}; \quad (14)$$

$$f(z) = 0,2 \frac{z^2 + 1,47 \cdot z + 0,2}{z^2 - 1,47 \cdot z + 1}, \quad (15)$$

где \aleph, β, γ – константы ($\aleph = 2; \beta = 0,06; \gamma = 50$).

5. Теперь, зная давление, температуру и турбулентную вязкость, можно по уравнениям из системы (5) вычислить скорость воздуха в каждой ячейке.

Шаги 1–4 повторяются до тех пор, пока разность скоростей на двух последовательных итерациях не будет меньше заданной величины. Полученные поля скорости представлены на рис. 1, 2.

Заключение

Создана программа, реализующая описанный алгоритм. Планируется увеличить скорость расчетов за счет распараллеливания вычислений на многопроцессорных компьютерах.

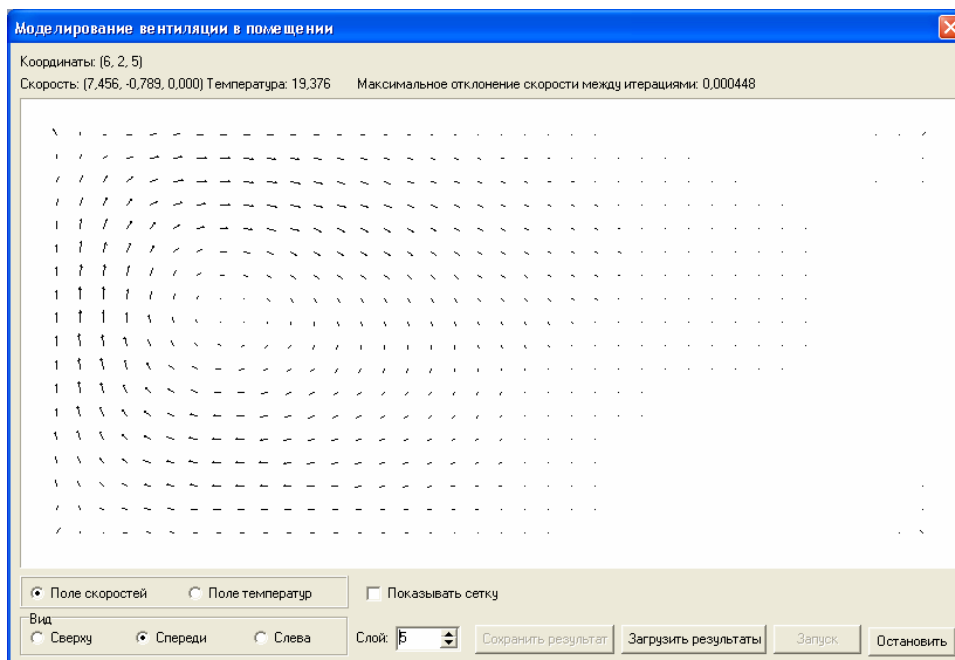


Рис. 1. Направление воздушных потоков в замкнутом помещении при подогревании левой стенки

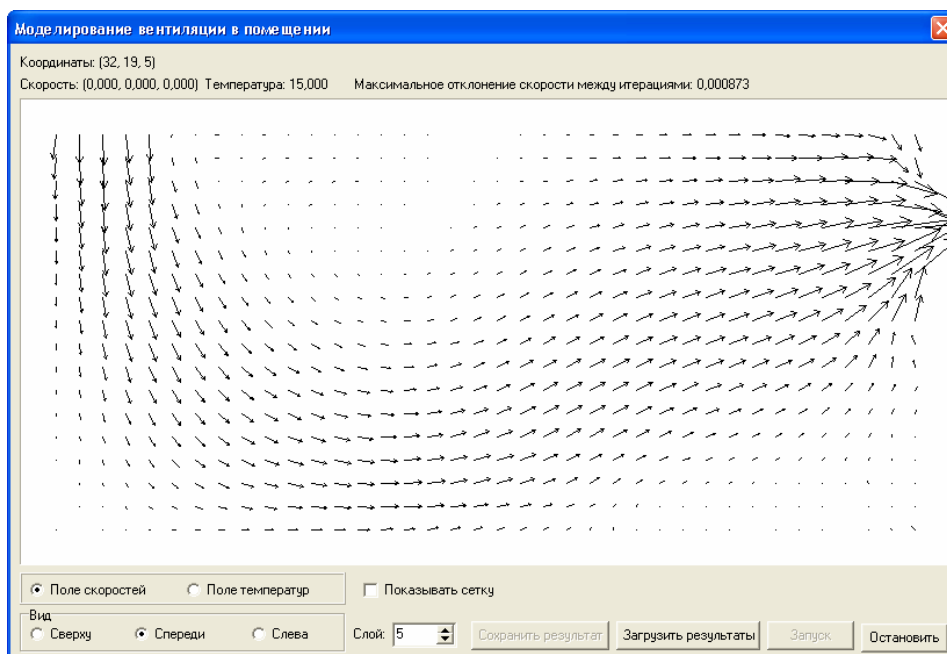


Рис. 2. Направление воздушных потоков при нахождении истока на верхней левой границе помещения, стока – на правой границе

Список литературы

1. **Роуч П.** Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1980.

2. **Численные** методы и параллельные вычисления для задач механики жидкости, газа и плазмы: Учеб. пособие / Э.Ф. Балаев, Н.В. Нуждин, В.В. Пекунов и др.; Иван. гос. энерг. ун-т. – Иваново, 2003.

3. **Полежаев В.И., Бунз А.В., Верезуб Н.А.** Математическое моделирование конвективного теплообмена на основе уравнений Навье-Стокса. – М.: Наука, 1987.

Кокорин Алексей Сергеевич,
ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
аспирант кафедры высокопроизводительных вычислительных систем,
телефоны: (4932) 32-08-14, 8-903-632-73-80,
e-mail: alexs-kokorin@yandex.ru