© «Вестник ИГЭУ» Вып. 4 2010 г.

УДК 517.53

# Несобственные интегралы с ядром $\cos mx$ и вычеты

Б.С. Зиновьев, канд. физ.-мат. наук, Л.Н. Соснина, ст. преп.

**Приведены шесть новых несобственных интегралов с ядром $\cos mx$, полученные единым методом теории вычетов комплексного анализа. При доказательстве использована основная теорема о вычетах, условия которой для приведенных интегралов выполняются.**

*Ключевые слова:* полюс третьего порядка, теорема о вычетах, подынтегральная функция.

# Improper Integrals with kernel cos mx and Residues

B.S. Zinovyev, Candidate of Physics and Mathematics, L.N. Sosnina, Senior Teacher

**The six new improper integrals with kernel cos *mx* are obtained by means of the single method of the theory of residues of the complex analysis. When proving theorem about residues, conditions of which for the given integrals are observed.**

*Keywords:* improper integrals, kernel, residues.

Единым методом теории вычетов комплексного анализа были получены 6 новых несобственных интегралов. Эти интегралы следующие:

при $a > 0, b > 0, m \ge 0$

1. $$\int_0^\infty \frac{\cos mx\,dx}{(a^2+x^2)^3} = \pi\frac{e^{-ma}}{2^4a^5}(a^2m^2+3am+3).$$

2. $$\int_0^\infty \frac{\cos mx\,dx}{(a^4+x^4)(b^2+x^2)} = \frac{\pi}{2(a^4+b^4)}\left(\frac{e^{-mb}}{b} + \frac{1}{\sqrt{2}a^3}e^{-\frac{ma}{\sqrt{2}}}\left((b^2-a^2)\cos\frac{ma}{\sqrt{2}}+(b^2+a^2)\sin\frac{am}{\sqrt{2}}\right)\right).$$

3. $$\int_0^\infty \frac{\cos mx\,dx}{(a^4+x^4)(b^2+x^2)^2} = \frac{\pi}{(a^4+b^4)^2}\left(\frac{e^{-mb}}{4b^3}\left((a^4+b^4)(1+bm)+4b^4\right) + \frac{e^{-\frac{ma}{\sqrt{2}}}}{2\sqrt{2}a^3}\left((b^4-a^4+2a^2b^2)\sin\frac{am}{\sqrt{2}} + (b^4-a^4-2a^2b^2)\cos\frac{am}{\sqrt{2}}\right)\right).$$

При $m = 0$ имеем

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(a^4+x^4)(b^2+x^2)^2} = \frac{\pi}{2(a^4+b^4)^2}\left(\frac{a^4+5b^4}{2b^3}+\frac{b^4-a^4-2a^2b^2}{\sqrt{2}a^3}\right).$$

4. $$\int_0^\infty \frac{\cos mx\,dx}{(a^4+x^4)\left(b^4+x^4\right)} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}(b^4-a^4)}\left(\frac{e^{-\frac{ma}{\sqrt{2}}}}{a^3}\left(\cos\frac{ma}{\sqrt{2}}+\sin\frac{ma}{\sqrt{2}}\right) - \frac{e^{-\frac{mb}{\sqrt{2}}}}{b^3}\left(\cos\frac{mb}{\sqrt{2}}+\sin\frac{mb}{\sqrt{2}}\right)\right), \quad a \ne b.$$

5. $$\int_0^\infty \frac{\cos mx\,dx}{a^6+x^6} = \frac{\pi}{6a^5}\left(e^{-am}+e^{-\frac{am}{2}}\left(\cos am\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}\sin am\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right).$$

При $m = 0$ $$\int_0^\infty \frac{dx}{a^6+x^6} = \frac{\pi}{3a^5}.$$

6. $$\int_0^\infty \frac{\cos mx\,dx}{(a^6+x^6)(b^2+x^2)} = \pi\left(\frac{e^{-mb}}{(a^6-b^6)2b}+\frac{e^{-ma}}{(b^2-a^2)6a^5}+\frac{e^{-\frac{ma}{2}}}{6a^5}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{(b^2-a^2)\cos am\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}(a^2+b^2)\sin am\frac{\sqrt{3}}{2}}{a^4+b^4+a^2b^2}\right)\right).$$

Приведем краткие доказательства этих формул. Заметим, что в справочнике [2] эти формулы отсутствуют.

1. $$\int_0^\infty \frac{\cos mx\,dx}{(a^2+x^2)^3} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{imx}dx}{(a^2+x^2)^3} = \pi\mathrm{Re}\, i\, res f(ai).$$

Точка $ai$ является полюсом третьего порядка для подынтегральной функции

$$f(z)=\frac{e^{imz}}{(a^2+z^2)^3}.$$

Поэтому (см.[1])

$$resf(ai)=\frac{1}{2}\lim_{z\to ai}\frac{d^2}{dz^2}(z-ai)^3\frac{e^{imz}}{(z^2+a^2)^3}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to ai}\frac{d^2}{dz^2}\frac{e^{imz}}{(z+ai)^3}=-i\frac{e^{-am}}{2^4a^5}\left((am)^2+3am+3\right).$$

Далее подставляем этот вычет в формулу.

2. $$\int_0^\infty\frac{\cos mx\,dx}{(a^4+x^4)(b^2+x^2)}=\pi\operatorname{Re}i\sum_{k=1}^{3}resf(z_k),$$

где $z_1=bi$; $z_2=ae^{i\frac{\pi}{4}}$; $z_3=ae^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Все эти точки лежат в верхней полуплоскости. Найдем вычеты в этих точках:

$$f(z)=\frac{e^{imz}}{(a^4+z^4)(b^2+z^2)};$$

$$resf(bi)=\frac{e^{-mb}}{(a^4+b^4)2bi};$$

$$resf(z_2)=\frac{e^{ima\left(\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}\right)}}{2a^3\left(-\sqrt2+i\sqrt2\right)\left(b^2+ia^2\right)}.$$

Соответственно,

$$resf(z_3)=\frac{e^{ima\left(-\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}\right)}}{2a^3\left(\sqrt2+i\sqrt2\right)\left(b^2+ia^2\right)}.$$

Складываем эти вычеты и после преобразований получаем требуемую формулу.

3. $$\int_0^\infty\frac{\cos mx\,dx}{(a^4+x^4)(b^2+x^2)^2}=$$

$$=\pi\operatorname{Re}i(resf(z_1)+resf(z_2)+resf(z_3)),$$

где $z_1=ae^{i\frac{\pi}{4}}$; $z_2=ae^{i\frac{3\pi}{4}}$; $z_3=bi$.

$$f(z)=\frac{e^{imz}}{(a^4+z^4)(b^2+z^2)^2};$$

$$resf(bi)=\lim_{z\to bi}\frac{d}{dz}\frac{(z-bi)^2e^{imz}}{(a^4+z^4)(b^2+z^2)^2}=$$

$$=\lim_{z\to bi}\frac{d}{dz}\frac{e^{imz}}{(a^4+z^4)(z+bi)^2}=$$

$$=\frac{e^{-mb}\left((a^4+b^4)(1+bm)+4b^4\right)}{i4b^3(a^4+b^4)^2};$$

$$resf(z_1)=\frac{e^{i\frac{ma}{\sqrt2}(1+i)}}{(b^2+a^2i)^2 2\sqrt2a^3(-1+i)};$$

$$resf(z_2)=\frac{e^{i\frac{ma}{\sqrt2}(-1+i)}}{(b^2-ia^2)^2 2\sqrt2a^3(1+i)}.$$

Складывая вычеты, получаем требуемую формулу.

4. $$\int_0^\infty\frac{\cos mx\,dx}{(a^4+x^4)(b^4+x^4)}=\pi\operatorname{Re}i\left(\sum_{k=1}^{4}resf(z_k)\right),$$

где $z_1=ae^{i\frac{\pi}{4}}$; $z_2=ae^{i\frac{3\pi}{4}}$; $z_3=be^{i\frac{\pi}{4}}$; $z_4=be^{i\frac{3\pi}{4}}$.

$$f(z)=\frac{e^{imz}}{(a^4+z^4)(b^4+z^4)};$$

$$resf(z_1)=\frac{e^{\frac{ma}{\sqrt2}(i-1)}}{2\sqrt2a^3(b^4-a^4)(-1+i)};$$

$$resf(z_2)=\frac{e^{\frac{ma}{\sqrt2}(-1-i)}}{2\sqrt2a^3(b^4-a^4)(1+i)}.$$

Складывая вычеты и учитывая симметричность относительно $a$ и $b$, получим требуемую формулу.

При $a=b$, $m=0$

$$\int_0^\infty\frac{dx}{(a^4+x^4)(b^4+x^4)}=\frac{\sqrt2\pi(a^2+ab+b^2)}{4(a+b)(a^2+b^2)a^3b^3}..$$

5. $$\int_0^\infty\frac{\cos mx\,dx}{(a^6+x^6)}=\pi\operatorname{Re}i\left(\sum_{k=1}^{3}resf(z_k)\right).$$

$$f(z)=\frac{e^{imz}}{a^6+z^6};$$

$$resf(ae^{i\frac{\pi}{6}})=\frac{e^{-\frac{ma}{2}}\left(\cos\frac{ma\sqrt3}{2}+i\sin\frac{ma\sqrt3}{2}\right)}{3a^5\left(-\sqrt3+i\right)};$$

$$resf(ae^{i\frac{5\pi}{6}})=\frac{e^{-\frac{ma}{2}}\left(\cos\frac{ma\sqrt3}{2}-i\sin\frac{ma\sqrt3}{2}\right)}{3a^5\left(\sqrt3+i\right)};$$

$$resf(ai)=\frac{e^{-am}}{6a^5i}.$$

Складываем вычеты и получаем требуемую формулу.

6. $$\int_0^\infty\frac{\cos mx\,dx}{(a^6+x^6)(b^2+x^2)}=$$

$$=\pi\operatorname{Re}i(resf(z_1)+resf(z_2)+resf(z_3)+resf(z_4)).$$

$$f(z)=\frac{e^{imz}}{(a^6+z^6)(b^2+z^2)};$$

$$resf(z_4)=resf(bi)=\frac{e^{-mb}}{(a^6-b^6)2bi};$$

$$resf(z_2)=resf(ai)=\frac{e^{-ma}}{i\,6a^5(b^2-a^2)};$$

$$resf(z_1)=resf(ae^{i\frac{\pi}{6}})=$$

$$=\frac{e^{\frac{ma}{2}(-1+\sqrt3i)}}{3a^5(-\sqrt3(a^2+b^2)+i(b^2-a^2))};$$

$$resf(z_3) = resf(ae^{i\frac{5\pi}{6}}) =$$

$$= \frac{e^{\frac{ma}{2}(-1-\sqrt{3}i)}}{3a^5(\sqrt{3}(a^2+b^2)+i(b^2-a^2))}.$$

Далее складываем вычеты и получаем формулу.

**Список литературы**

1. **Шабат Б.В.** Введение в комплексный анализ. Ч. 1. – М., 1976.
2. **Двайт Г.Б.** Таблица интегралов и другие математические формулы. – М.: Наука, 1964.
3. **Зиновьев Б.С., Елкина Г.М., Третьякова И.Ю.** Вычеты и интегралы // Вестник ИГЭУ. – 2009. – Вып. 4. – С. 70–72.

*Зиновьев Борис Сергеевич,*
ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики,
e-mail: higher@math.ispu.ru

*Соснина Лидия Николаевна,*
ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
старший преподаватель кафедры высшей математики,
e-mail: higher@math.ispu.ru