

ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССОВ ИЗМЕЛЬЧЕНИЯ И КЛАССИФИКАЦИИ СЫПУЧИХ МАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА

ЖУКОВ В.П., OTWINOWSKI H., доктора техн. наук, БЕЛЯКОВ А.Н., URBANIAK D. кандидаты техн. наук

Предложено обобщенное описание совмещенных процессов движения, измельчения и классификации сыпучих материалов на основе уравнения Больцмана. Приведено сравнение численных и аналитических результатов расчета процесса гравитационной классификации порошков.

Ключевые слова: уравнение Больцмана, измельчение, классификация, транспорт, сыпучие материалы.

DESCRIPTION OF GRINDING OPERATION AND GRANULAR MATERIALS CLASSIFICATION BASED ON BOLTZMANN EQUATION

V.P. ZHUKOV, H. OTWINOWSKI, Doctors of Engineering, A.N. BELYAKOV, D. URBANIAK, Candidates of Engineering

The authors consider the general description of combined movements, grinding and classification processes of granular materials based on the Boltzmann equation. The article shows the comparison of numerical and analytical calculation results of the gravitational classification process of powders.

Keywords: Boltzmann equation, grinding, classification, transportation, granular materials.

Для описания на единой методической основе совмещенных процессов измельчения, классификации и движения сыпучих материалов предлагается использовать уравнение Больцмана [1].

Кинетическое уравнение Больцмана определяет изменение во времени распределения плотности вероятности в выбранном фазовом пространстве. Для порошкообразных материалов важной характеристикой является размер частиц, который предлагается использовать в качестве дополнительной координаты фазового пространства. В качестве искомой функции рассматривается плотность распределения частиц по координатам, скоростям и размерам $f(\vec{r}, \vec{v}, \delta, t)$. Произведение функции $f(\vec{r}, \vec{v}, \delta, t)$ и фазового объема $dV = dx_1 dx_2 dx_3 dv_1 dv_2 dv_3 d\delta$ показывает вероятность в момент времени $(t, t + dt)$ частицы размера $(\delta, \delta + d\delta)$, находящейся в точке с координатами $(x_1, x_1 + dx_1)$, $(x_2, x_2 + dx_2)$, $(x_3, x_3 + dx_3)$, двигаться со скоростью $(v_1, v_1 + dv_1)$, $(v_2, v_2 + dv_2)$, $(v_3, v_3 + dv_3)$. В мельнице функция распределения изменяется за счет разрушения и движения частиц, в классификаторе – только за счет движения.

В общем случае изменение функции распределения обусловлено, во-первых, физическим перемещением частиц $div_r(\vec{v}f)$, во-вторых, изменением скорости частиц $div_v(\vec{a}f)$ и, в-третьих, переходом частиц в другой класс крупности за счет разрушения \dot{f}_c . В дифференциальной форме уравнение Больцмана для совмещенных процессов движения, классификации и измельчения принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial v_1 f}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2 f}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3 f}{\partial x_3} + \frac{\partial a_1 f}{\partial v_1} + \frac{\partial a_2 f}{\partial v_2} + \frac{\partial a_3 f}{\partial v_3} = \dot{f}_c$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial v_k f}{\partial x_k} + \frac{\partial a_k f}{\partial v_k} = \dot{f}_c \quad (k = 1, 2, 3), \quad (1)$$

где $f(\vec{r}, \vec{v}, \delta, t)$ – искомая плотность распределения частиц по координатам $\vec{r}(x_1, x_2, x_3)$, скоростям $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ и размерам; $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ – ускорение частицы; повторение индекса k сверху и внизу дроби показывает суммирование по этому индексу.

Величина \dot{f}_c в правой части уравнения описывает изменение функции распределения за счет ухода разрушенных частиц наблюдаемого размера и прихода осколков разрушения более крупных частиц. Используя для описания измельчения селективную модель [2], уравнение (1) представляется в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial v_k f}{\partial x_k} + \frac{\partial a_k f}{\partial v_k} = -fS + \int_{\delta}^{\delta_{\max}} fSb d\varepsilon,$$

где S, b – селективная и распределительная функции разрушения; δ, ε – наблюдаемый и текущий размеры частиц.

Для уравнения (1) предлагается численный метод решения [3], построенный с использованием математического аппарата теории цепей Маркова. Обозначим через N число координат или размерность задачи. Вдоль каждой координаты процесса число выбранных ячеек (или шагов) обозначим n_i , где индекс $i = 1, 2, \dots, N$ показывает порядковый номер координаты. Общее число анализируемых ячеек n будет определяться произведением N чисел $n = n_1 * n_2 * \dots * n_N$. Вектор состояния системы $S = \{S_i\}$ размера $1 * n$ составляется из вероятностей попадания в i -ю ячейку: $S_i = f \Delta V$. Сумма этих вероятностей из условия

нормировки, которое имеет смысл закона сохранения массы, равна единице: $\sum_i S_i = 1$.

Для описания эволюции системы во времени согласно (1) для каждой ячейки введем характеристику возможных переходов – случайную величину Y_i , которая определяется множеством значений, которые она может принимать, и множеством соответствующих им вероятностей:

$$Y_i = \{y_1, y_2, \dots, y_{m_i}\},$$

$$Q_i = \{q_1, q_2, \dots, q_{m_i}\},$$

где y_1, y_2, \dots, y_{m_i} – номера ячеек, куда возможен переход из ячейки i с вероятностями q_1, q_2, \dots, q_{m_i} ; m_i – число ячеек, в которые возможен переход из ячейки i . В соответствии с условием нормировки сумма вероятностей возможных переходов равна единице: $\sum q = 1$.

В общем случае для описания перехода может быть использована матрица размера $n \times n$, которую, однако, в силу большого числа нулевых элементов целесообразно использовать для одномерных или двумерных задач. Предлагаемый метод расчета содержит адреса ненулевых переходов и соответствующие им вероятности и требует минимального объема машинной памяти, что особенно актуально при решении многомерных задач.

Если переход в многомерном фазовом пространстве разрешен только в соседние ячейки, адреса возможных переходов записываются следующим образом: $Y_i = \{i, i \pm 1, i \pm n_1, i \pm n_1 n_2, \dots, i \pm n_1 n_2 \dots n_{m_i-1}\}$. Адрес i означает переход в свою ячейку, адрес $i \pm 1$ – переход в правую или левую ячейки, адрес $i \pm n_1$ – переход в ячейки, расположенные на строку выше или ниже ячейки с номером i , и т. д. Вероятности переходов q определяются из физических условий протекания процессов.

Для описания перехода системы из одного состояния в другое используется специальный матричный оператор

$$S^{k+1} = \hat{p}(Y, S^k), \quad (2)$$

где верхний индекс k показывает номер шага по времени. Матричный оператор \hat{p} в выражении (2) может быть определен (заменен) следующим тождественным суммированием возможных переходов в рассматриваемую i -ю ячейку потоков вероятности из всех (n) ячеек системы:

$$S_i^{k+1} = \sum_{j=1, n} S_j^k p_{ij},$$

где p_{ij} – вероятность перехода из j -й ячейки в i -ю, которая определяется согласно

$$p_{ij} = \begin{cases} q_{j1} & \text{при } y_{j1} = i, \\ 0 & \text{при } y_{j1} \neq i, \end{cases}$$

где $j_1 = 1, m_j$.

В качестве тестового примера рассматривается одномерное равноускоренное движение материала под действием силы тяжести. Предлагаются два описания этого процесса: стохастический с помощью уравнения Больцмана и детерминированный в рамках механики Ньютона [4].

Для движения вдоль координаты x уравнение Больцмана (1) переписывается в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial v f}{\partial x} + \frac{\partial a f}{\partial v} = 0. \quad (3)$$

Считается, что материал может переходить только в соседние ячейки. Вероятности переходов рассматриваются в двумерном фазовом пространстве, которое допускает использование более наглядной двойной индексации ячеек. Для равноускоренного одномерного движения вероятность перехода из i -й в соседнюю по координате $(i+1)$ -ю ячейку за время Δt находится из выражения $p_x = v \Delta t / \Delta x$, где v – текущая скорость; Δx – размер ячейки вдоль x . Вероятность перехода в соседнюю по скорости $(j+1)$ -ю ячейку за время Δt определяется выражением $p_v = a \Delta t / \Delta v$, где Δv – размер ячейки вдоль v ; $a = g$ – ускорение свободного падения. Уравнение баланса массы для текущей ячейки с номером ij позволяет получить выражение для искомой функции f_{ij} в следующий $(k+1)$ момент времени:

$$f_{i,j}^{k+1} = f_{i,j}^k \left(1 - \frac{v_j \Delta t}{\Delta x} - \frac{a \Delta t}{\Delta v} \right) + f_{i-1,j}^k \frac{v_j \Delta t}{\Delta x} + f_{i,j-1}^k \frac{a \Delta t}{\Delta v}. \quad (4)$$

Эволюция плотности вероятности во времени определяется согласно (2). На рис. 1 представлены результаты численных экспериментов по определению закона движения и закона изменения скорости материала при детерминированном ($x = x_0 + v_0 t + g t^2 / 2$, $v = v_0 + g t$, рис. 1, линии) и стохастическом (согласно (2), рис. 1, точки) описании движения.

В качестве второго примера рассматривается движение частиц материала в среде с линейным сопротивлением (коэффициент сопротивления k). Ускорение материала в уравнении (1) определяется как разность ускорения свободного падения и силы сопротивления, отнесенной к массе: $a = g - k v_j / m$. На рис. 2 представлены результаты расчетного анализа, выполненного для детерминированного и стохастического подходов. На рис. 2 решение дифференциального уравнения движения ($x = x_0 + (m^2/k^2)(g - k v_0/m)(e^{-kt/m} - 1) + m g t / k$, $v = (m/k)(g - k v_0/m)e^{-kt/m}$) представлено линиями, а результаты численного решения уравнения Больцмана – точками. Анализ зависимостей, приведенных на рис. 1, 2, показывает, что уравнение Больцмана и метод его решения дают результаты, совпадающие с детерминированным описанием движения.

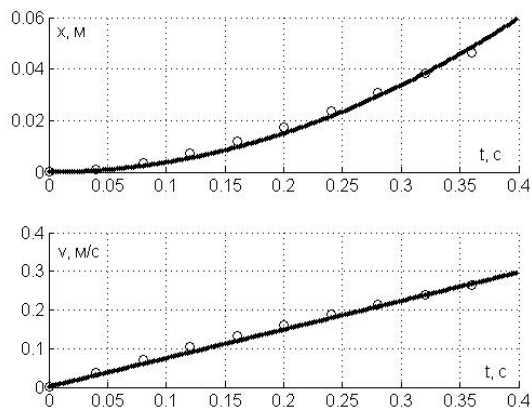


Рис. 1. Сопоставление зависимостей координаты x и скорости v от времени при равноускоренном движении для детерминированного (линии) и стохастического (точки) описания

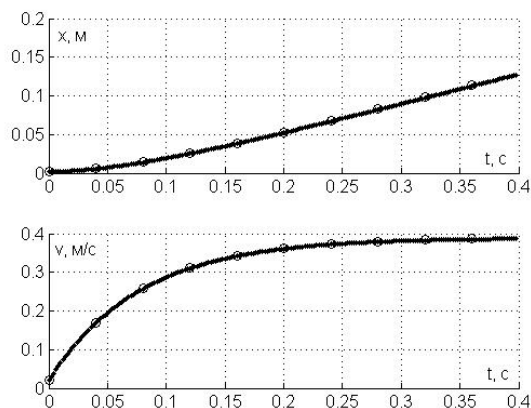


Рис. 2. Сопоставление зависимостей координаты x и скорости v от времени при движении в среде с линейным сопротивлением для детерминированного (линии) и стохастического (точки) описания

Следует отметить, что предложенный подход на единой методологической основе позволяет описывать и более сложные совмещенные процессы, анализ которых более подробно дадим на примере процессов движения и классификации частиц (по плотности и размеру) в гравитационном аппарате.

Классификация материала по плотности в неподвижной жидкости осуществляется следующим образом. Более плотные частицы движутся вниз быстрее и, соответственно, быстрее оседают. Менее плотные частицы могут вообще не оседать (например, дерево в воде). На частицу при движении в вертикальном канале действуют сила тяжести и сила Архимеда. Ускорение частицы определяется выражением $a = g(\rho_m - \rho_j) / \rho_m$, где ρ_m, ρ_j – плотности материала и жидкости соответственно. На контрольной глубине устанавливается поглощающий экран (адсорбер) для улавливания частиц. Для выбранного времени процесса согласно (2) определяется распределение плотности вероятности по фазовому пространству. Вероятность поглощения экраном (адсорбером) определяется через отношение поглощенной экраном массы к массе подаваемой порции. Зави-

симости вероятности поглощения от плотности материала для различных характерных времен процесса представлены на рис. 3.

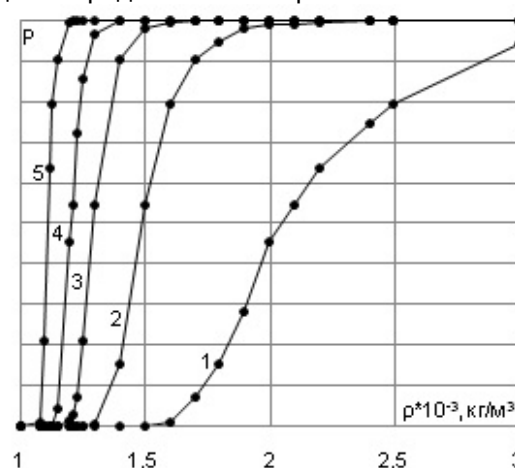


Рис.3. Зависимости вероятности осаждения от плотности частицы при различном времени процесса: 1 – $t = 0,2$; 2 – $0,25$; 3 – $0,3$; 4 – $0,35$; 5 – $0,45$ с

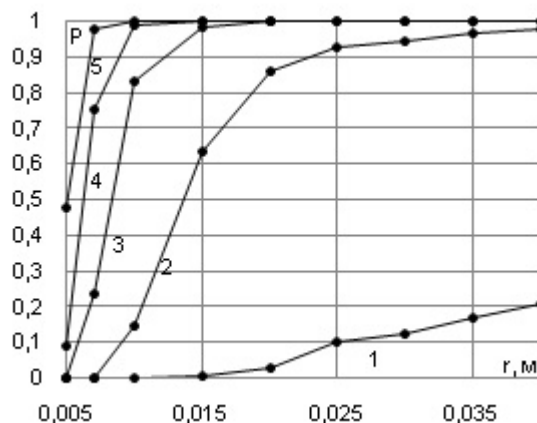


Рис. 4. Зависимости вероятности осаждения от крупности частицы при различном времени процесса: 1 – $t = 0,2$; 2 – $0,25$; 3 – $0,3$; 4 – $0,35$; 5 – $0,45$ с

Процесс классификации материала по крупности частиц описывается согласно уравнению (2) с учетом известной зависимости коэффициента сопротивления от поперечного сечения сферической частицы [4]. На рис. 4 представлены результаты расчета разделения частиц по крупности в соответствии с законом сопротивления Ньютона [4].

Найденные из решения уравнения Больцмана зависимости (рис. 3, 4) являются, по- существу, кривыми Тромпа или кривыми разделения [4], которые позволяют полностью рассчитывать процесс классификации по крупности или плотности частиц в анализируемом аппарате.

Список литературы

1. Вулис Л.А. и др. Теория и расчет магнитогазодинамических течений. – М.: Атомиздат, 1971.
2. Mizonov V., Zhukov V., Bernotat. Simulation Of Grinding: New Approaches. – Ivanovo, 1997.
3. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ «Расчет многомерных совмещенных процессов измельчения, классификации в сыпучих средах

№2010612671 от 19 апреля 2010 года» / А.Н. Беляков,
В.П. Жуков, А.А. Власюк, А.Е. Барочкин.

4. **Мизонов В.Е., Ушаков С.Г.** Аэродинамическая
классификация порошков. – М.: Химия, 1989.

Жуков Владимир Павлович,
ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики,
телефон (4932) 26-97-45,
e-mail: zhukov@ispu.ru

Беляков Антон Николаевич,
ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
кандидат технических наук, докторант кафедры прикладной математики
телефон (4932) 26-97-45.

Otwinowski Henryk,
Ченстоховский политехнический институт (Польша),
доктор технических наук, профессор,
телефон +48-34-250-579.

Urbaniak Darek
Ченстоховский политехнический институт (Польша),
кандидат технических наук
телефон +48-34-250-579.