© «Вестник ИГЭУ» Вып. 4 2007 г.

УДК 517.55

ЗАМКНУТЫЕ СИСТЕМЫ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ В КРАТНО-КРУГОВЫХ ОБЛАСТЯХ ПО ДОПУСТИМЫМ МЕРАМ

ЗИНОВЬЕВ Б.С., канд. физ.-мат. наук

Рассматриваются вопросы теории функций многих комплексных переменных. Исследуются системы замкнутых ортонормированных голоморфных функций в кратно-круговых областях по допустимым мерам.

Ключевые слова: замкнутая ортонормированная система функций, ряд Фурье, теория функций многих комплексных переменных.

CLOSED SYSTEMS OF HOLOMORPHIC FUNCTIONS IN MULTICIRCULAR DOMAINS AS TO ADMISSIBLE MEASURES

ZINOVJEV B.S., Ph.D.

This work is devoted to the problems of theory of functions of many complex variables. The author investigates systems of closed orthonormal holomorphic functions in multicircular domains as to admissible measures.

Key words: closed orthonormal function system, F-series, theory of functions of many complex variables.

Важное значение для теории рядов Фурье имеет понятие замкнутой (полной) ортонормированной системы функций (о. н. с. ф.).

Определение. О.н.с.ф. $\left\{\varphi_\nu \in A_\lambda^2(D)\right\}$ по мере λ называется замкнутой (полной) в кратно-круговой области D по мере λ (з.о.н.с.ф.), если для всякой функции $f(z)\in A_\lambda^2(D)$ вместо неравенства Бесселя имеет место неравенство Парсеваля $\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_\nu|^2=\|f\|_\lambda^2$, где $a_\nu=(f,\varphi_\nu)_\lambda$ – коэффициенты Фурье функции f(z).

Предложение 1. Для з.о.н.с.ф. $\left\{\varphi_\nu \in A_\lambda^2(D)\right\}$ по мере λ в области D ряд Фурье $\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu\varphi_\nu(z)$ функции $f(z)\in A_\lambda^2(D)$ сходится по норме к f(z).

Доказательство. Пусть $b_\nu=a_\nu=\left(f,\varphi_\nu\right)$. Тогда $\left\|f-\sum_{\nu=0}^{N}b_\nu\varphi_\nu\right\|^2=\left(\|f\|^2-\sum_{\nu=0}^{N}|a_\nu|^2\right)\to 0$, $N\to\infty$ в силу равенства Парсеваля.

Более того, ряд Фурье функции $f(z)\in A_\lambda^2(D)$ по з.о.н.с.ф. сходится к f(z) не только по норме, но и равномерно внутри D.

Это утверждается в следующем предложении.

Предложение 2. Ряд Фурье функции $f(z)\in A_\lambda^2(D)$ относительно з.о.н.с.ф. $\left\{\varphi_\nu \in A_\lambda^2(D)\right\}$ по C-допустимой мере λ сходится внутри D абсолютно и равномерно к функции f(z), т.е. $\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu\varphi_\nu(z)=f(z)$, $a_\nu=\left(f,\varphi_\nu\right)_D^\lambda$.

Доказательство. Абсолютная и равномерная сходимость ряда Фурье внутри D была доказана ранее [1, предложение 14] для о.н.с.ф. Покажем, что для з.о.н.с.ф. $\left\{\varphi_\nu\right\}$ ряд Фурье функции $f(z)\in A_\lambda^2(D)$ сходится именно к f(z). Для этого возьмем $z\in K\subset D$ и оценим разность (K – компакт в D):

$$\left|f(z)-\sum_{\nu=0}^{N}a_\nu\varphi_\nu(z)\right|^2\le$$

$$\le C(K)\left\|f-\sum_{\nu=0}^{N}a_\nu\varphi_\nu\right\|_D^2=$$

$$=C(K)\left(\|f\|^2-\sum_{\nu=0}^{N}|a_\nu|^2\right)\to 0, N\to\infty.$$

При этом использовались C-допустимость меры λ и равенство Парсеваля.

Имеет также место важное предложение, в некотором смысле обратное предыдущему, дающее достаточное условие замкнутости ортонормированной системы.

Предложение 3 (см. [2]). Пусть $\left\{\varphi_\nu(z)\in A_\lambda^2(D), \nu=0,1,2...\right\}$ – о.н.с.ф. в области D по заданной мере λ и последовательность чисел $\left\{b_\nu\right\}$ такова, что $\sum_{\nu=0}^{\infty}|b_\nu|^2<\infty$. Если каждую функцию $f(z)\in A_\lambda^2(D)$ можно представить рядом

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}b_\nu\varphi_\nu(z)=f(z),,$$

равномерно сходящимся внутри D, то система $\left\{\varphi_\nu(z)\right\}$ замкнутая.

Доказательство имеется в [2, с. 82], причем требование $\sum_{\nu=0}^{\infty}|b_\nu|^2<\infty$ будет заведомо выполнено, если $b_\nu=a_\nu=\left(f,\varphi_\nu\right)$ в силу неравенства Бесселя.

Дадим второе эквивалентное определение замкнутой системы голоморфных функций.

Определение. Если каждая функция $f(z) \in A_\lambda^2(D)$ аппроксимируется линейной комбинацией функций ортогональной системы $\left\{\varphi_\nu \in A_\lambda^2(D)\right\}$ по мере λ в смысле среднего квадратического отклонения, то система $\left\{\varphi_\nu(z)\right\}$ называется замкнутой (полной).

Предложение 4. Два определения замкнутой (полной) системы являются эквивалентными.

Доказательство. Пусть функция $f(z) \in A_\lambda^2(D)$ аппроксимируется линейной комбинацией ортогональной системы $\left\{\varphi_\nu\right\}$ в смысле среднего квадратического отклонения, т.е. для любой функции $f(z) \in A_\lambda^2(D)$ существуют константы c_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ такие, что

$$\left(f(z) - \sum_{\nu=1}^{N} c_\nu \varphi_\nu(z), f(z) - \sum_{\nu=1}^{N} c_\nu \varphi_\nu(z)\right) =$$

$$= \left\| f(z) - \sum_{\nu=1}^{N} c_\nu \varphi_\nu(z) \right\|^2 \to 0,\ N \to \infty,$$

т.е. $\|f\|^2 + \sum_{\nu=1}^{N} \left|a_\nu - c_\nu\right|^2 - \sum_{\nu=1}^{N} \left|a_\nu\right|^2 \to 0$, $N \to \infty$, где $a_\nu = \left(f, \varphi_\nu\right)$. Таким образом, в силу неравенства Бесселя $a_\nu = c_\nu$ и в пределе имеем равенство Парсеваля.

Докажем обратное. Пусть имеет место равенство Парсеваля. Это значит, что

$$\left\| f(z) - \sum_{\nu=1}^{N} a_\nu \varphi_\nu(z) \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{\nu=1}^{N} \left|a_\nu\right|^2 \to 0, \quad N \to \infty,$$

т.е. функция f(z) аппроксимируется в среднем своим рядом Фурье.

Предложение 5. В каждой ограниченной полной кратно-круговой области D существует замкнутая ортонормированная система функций $\left\{\varphi_\nu(z)\right\}$ по B-допустимой мере λ.

Рассмотрим пространство $A_\lambda^2(D)$. По предложению 10 (см. [1]) это пространство является гильбертовым по C и по B-допустимой мере λ. Покажем, что это пространство является сепарабельным. Очевидно включение $A_{hdv}^2(D) = A_{dv}^2(D) \subset L_{dv}^2(D)$. Пространство $L_{dv}^2(D)$ является сепарабельным, так как содержит счетное подмножество многочленов с рациональными коэффициентами. Далее применяется теорема о том, что всякое подмножество сепарабельного метрического пространства само является сепарабельным, а это есть H и D условия того, что в D существует з.о.н.с.ф.

Заметим, что близкие вопросы изложены в монографии [3].

Предложение 6. Система функций

$$\varphi_\nu(z) = \sqrt{\frac{\left(|\nu| + n\right)!}{\pi^n R^{2(|\nu|+n)} \nu!}} \cdot z^\nu, \qquad \nu = \left(\nu_1, \ldots, \nu_n\right)$$

$\nu_i = 0,1,2,\ldots$ является з.о.н.с.ф. по мере Лебега для гипершара радиуса R $\left(d\lambda = d|\xi|^2\right)$.

Доказательство. Рассмотрим гипершар $D = \left\{z : \left|z_1\right|^2 + \ldots + \left|z_n\right|^2 < R^2\right\}$ и найдем для него ортонормированную систему функций $\varphi_\nu(z) = b_\nu z^\nu$ по мере Лебега, где

$$\left(b_\nu^2\right)^{-1} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|D|} d|\xi|^2 \int_{\Delta_{|\xi|}} |\xi|^{2\nu} \frac{d\xi}{\xi} =$$

$$= \pi^n \int_{|D|} |\xi|^{2\nu} d|\xi|^2 = \pi^n \int_{\sqrt{|D|}} |\xi|^\nu d|\xi|,$$

где $\sqrt{|D|} = \left\{\xi : \left|\xi_1\right| + \ldots + \left|\xi_n\right| < R\right\}$ – гиперконус.

Для n-мерного симплекса $G = \left\{x_i \ge 0, x_1 + \ldots + x_n < R\right\}$ известен интеграл [4, с. 634] для $\nu_i = 0,1,2,\ldots$ $\int_G x^\nu dx = \frac{R^{|\nu|+n} \nu!}{\left(|\nu| + n\right)!}$. Поэтому

$$\left(b_\nu^2\right)^{-1} = \frac{\pi^n R^{2(|\nu|+n)} \nu!}{\left(|\nu| + n\right)!}.$$

Докажем замкнутость данной системы в D. Поскольку любая функция $f(z) \in A_{dv}^2(D)$ представима в области D степенным рядом

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu(z),$$

где $a_\nu = \left(f, \varphi_\nu\right), \varphi_\nu = b_\nu z^\nu$, то

$$\|f\|^2 = \frac{\pi^n}{(2\pi i)^n} \int_{|D|} d|\xi|^2 \int_{\Delta_{|\xi|}} |f|^2 \frac{d\xi}{\xi} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \left|a_\nu\right|^2 \left|b_\nu\right|^2 \pi^n \int_{|D|} |\xi|^{2\nu} d|\xi|^2 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left|a_\nu\right|^2,$$

т.е. выполняется равенство Парсеваля.

Предложение 7. Для ограниченной, кратно-круговой, полной, содержащей свой центр области D система функций $\varphi_\nu(z) = b_\nu z^\nu = \left(\int_{|D|} |\xi|^{2\nu} d\lambda\right)^{-\frac{1}{2}} z^\nu$ является замкнутой ортонормированной системой для D-допустимой меры λ и $f(z) \in A_\lambda^2(D)$.

Доказательство. Если $f(z) \in A_\lambda^2(D)$, то

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu z^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu(z),$$

где

$$a_\nu = \left(f, \varphi_\nu\right), \varphi_\nu = b_\nu z^\nu = \frac{z^\nu}{\left(\int_{|D|} |\xi|^{2\nu} d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

$$\|f\|^2 = (f,f) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{|D|} d\lambda \int_{\Delta_{|\xi|}} |f|^2 \frac{d\xi}{\xi} =$$

Найдем $= \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2 |b_\nu|^2 \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{|D|} d\lambda \int_{\Delta_{|\xi|}} |\xi|^{2\nu} \frac{d\xi}{\xi} =$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2 |b_\nu|^2 \int_{|D|} |\xi|^{2\nu} d\lambda = \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2,$$

т.е. система замкнутая и ортонормированная.

Для единичного гипершара D рассмотрим меру $d\lambda = \frac{d|\xi|^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\right)^n} = t^{-2}dt^2 \wedge dr^2$[1],

где $|\xi_i| = tr_i$, $i = 1,2,...,n$, $0 \le t \le 1$, $r = (r_1,...,r_n) \in |\partial D|$.

Эта мера по предложению 9 (см. [1]) является C-допустимой.

Предложение 8. Для единичного гипершара и указанной меры система функций

$$\varphi_\nu(z) = \sqrt{\frac{|\nu|(|\nu|+n-1)!}{\nu!}} \cdot z^\nu, \qquad \nu = (\nu_1,...,\nu_n),$$

$\nu_i = 0,1,2,...$, $i = 1,2,...,n$, является з.о.н. системой.

Для совокупности областей $D^p = \left\{ z : |z_1|^{2/p_1} + ... + |z_n|^{2/p_n} < r^2 \right\}$ возьмем меру

$$d\lambda = |\xi|^{2/p(s-p+1)} d|\xi|^2.$$

Эта мера по предложению 9 (см. [1]) является C-допустимой.

Предложение 9. Для областей D^p и указанной меры система функций

$$\varphi_\nu(z) = \sqrt{\frac{(|\nu p + s| + n)!}{p_1...p_n(\nu p + s)!}} \cdot z^\nu r^{\frac{1}{(|p\nu|+|p|)}}, \quad \nu = (\nu_1,...,\nu_n),$$

является з.о.н. системой.

При $s_i = p_i - 1$, $d\lambda = d|\xi|^2$

$$\varphi_\nu(z) = \sqrt{\frac{(|\nu p| + |p|)!}{p_1...p_n(p(\nu+1)-1)!}} \cdot z^\nu r^{\frac{1}{(|p\nu|+|p|)}}.$$

Доказательство основано на интеграле (см.[4]) $\int_G x^\nu dx = \frac{p_1...p_n r^{2(|p\nu|+|p|)}(p(\nu+1)-1)!}{(|p\nu|+|p|)!}$ для

$$G = \left\{ x \ge 0 : x_1^{1/p_1} + ... + x_n^{1/p_n} < r^2 \right\} \subset R^n.$$

Следствие. Объем области D^p выражается формулой $V_{D^p} = \pi^n \frac{R^{2|p|}p!}{(|p|)!}$, где $|p| = p_1 + ... + p_n$, так как $dv = \frac{1}{(2\pi i)^n} d|\xi|^2 \wedge \frac{d\xi}{\xi}$.

Предложение 10. Для областей $D^q = \left\{ z : |z_1|^{2q_1} + ... + |z_n|^{2q_n} < r^2 \right\}$, $q_i = 1,2,...$, $i = 1,2,...,n$, и меры Лебега система функций $\varphi_\nu^2(z) =$

$$= \frac{q_1...q_n\Gamma(\frac{\nu_1+1}{r_1} + ... + \frac{\nu_n+1}{r_n} + 1)}{\pi^n\Gamma(\frac{\nu_1+1}{r_1})...\Gamma(\frac{\nu_n+1}{r_n})\left(r^{\frac{2}{q_1}}\right)^{\nu_1+1}...\left(r^{\frac{2}{q_n}}\right)^{\nu_n+1}} \cdot z^{2\nu}.$$

является з.о.н.с.ф., где $\Gamma(\nu)$ – гамма-функция Эйлера.

Список литературы

1. **Зиновьев Б.С.** Ортонормированные системы голоморфных функций в кратно-круговых областях по допустимым мерам // Вестник ИГЭУ. – 2005. – Вып. 4. – С. 113–117.
2. **Фукс Б.А.** Специальные главы теории функций многих комплексных переменных. – М.: Физматгиз, 1963.
3. **Айзенберг Л.А., Южаков А.П.** Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе. – Новосибирск: Наука, 1979.
4. **Рыжик М.С., Градштейн И.М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1962.

Зиновьев Борис Сергеевич,
ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики,
телефон (4932) 26-97-62,
e-mail: higher@math.ispu.ru